پزشک - انواری

خلاصه ریاضیات

متوسطه

چاپ اول - ۱۳۳۶

شرکت سهامی چاپ

حق چاپ و استفاده از کلیشه ها
محفوظ است

راهنمای کتاب

لب کتاب را بطوریکه در شکل بالا می بینید کمی باز کنید ؛ نشانی سیاهی که در مقابل علامت ← این صفحه بمحاذات هر قسمت نمودار میشود صفحهٔ اول آن قسمت از مطالب کتاب است . انگشت شست دست چپ را روی نشانی سیاه بگذارید و قسمتی را که میخواهید باز کنید .

اهداء کتاب

این کتاب را بکسانیکه برای
پیشرفت فرهنگ کمر همت
بسته وبا روحی پاك در این
راه مردانه میکوشند تقدیم
میکنیم

فهرست

مقدمه

رشته‌های مختلف علوم، خاصه علوم ریاضی، چنان بیکدیگر بستگی دارند که درموارد بسیار فهم و درك مطلبی در یك رشته بمراجعه مطالب متنوع در رشته های دیگر محتاج میباشد.

ازاین روی طالب علم باید کتابهای متعدد دردسترس خود داشته باشند و گاه و بیگاه بآنها مراجعه کنند.

این کار برای کسانیکه با نفقن و فراغ خاطر بمطالعه میپردازند دشوار نیست، اما برای جوانانیکه دردوره های متوسطه وعالی بکسب دانش مشغولند جای آن نیست که مقدار زیادی از وقت گرانبهایشان که باید برای فرا گرفتن مواد درسی مصروف شود به تجسس در کتاب های مختلف صرف گردد.

ما، برای اینکه خدمت و کمکی بدانش آموزان و

دانشجویان جوان کرده باشیم، آنچه در رشته های مختلف ریاضیات مقدماتی باید آموخت یکجا گرد آورده و در یک مجلد در دسترس آنان قرار میدهیم .

در این مجموعه نظری برنامه کنونی تحصیلات متوسطه نداشته و مطالب کتاب را بر طبق آن مرتب نکرده ایم ، بلکه آنچه در حساب، جبر ، هندسه ومخروطات ، هندسه های رقومی و ترسیمی ، مثلثات ، مکانیک و هیئت باید آموخته شود بطور مختصر ، وشاید مفید ، جمع آوری نموده ایم .

برای هیچیک ازمطالب اقامهٔ دلیل و برهان نکرده ایم چه دراین صورت کتاب بسیارمفصل میشد وجا دادن مطالب در یک مجلد میسر نمیگردید .

این کتاب که با قطع کوچک تهیه شده بهترین رفیق شفیق جوان دانشجوست و مطالبی را که وی از کتابهای متعدد آموخته است یاد آوری میکند واورا دراینکه هرلحظه بکتابهای مختلف درسی مراجعه کند بی نیاز میسازد . همه جا همراه او ، همیشه در دسترس او و در هرلحظه طرف مراجعه او میتواند بود .

ما بسیار کوشیده‌ایم که کتاب حاضر را کامل و جامع تهیه و تدوین کرده باشیم ، ولی تردیدی نداریم که نقص‌های بسیار دارد و تکمیل آن محتاج براهنمائی و کمک همکاران عزیز و معلمان دانشمند میباشد .

این کار هرچند بظاهر خرد باشد ، شگرفتر از آنیست که بتوانیم ادعا کنیم که آنرا چنانکه شایسته است انجام داده‌ایم چنین داعیه‌ای نداریم و از دبیران فاضل خواستاریم که ما را بمعایب و نواقص کتاب واقف سازند تا در چاپهای بعد اثری مفید تر و جامع تر در دسترس اهل طلب قرار داده شود .

امیدواریم تا چاپهای دیگر کتاب ، چاپخانه های ما بوسایل چاپ کتب ریاضی مجهزتر شوند تا نواقصی هم که از حیث حروف و علامات ریاضی ، یا احیاناً کمی کارگر متخصص پیدا شده است از میان برود .

بهمن ماه ۱۳۲۶

احمد بیرشک ـ احمد انواری

حساب

۱ - کلیات

۱ - آنچه که قابل کم و زیاد شدن باشد کمیت است .

۲ - قسمت محدودی از کمیت را مقدار گویند :

۳ - واحد یا یکه هر کمیت مقدار مشخص و معینی از آن کمیت است که برای سنجیدن مقادیر همجنس خود بکار میرود .

٤ - عدد نتیجه سنجیدن هر مقدار با واحد همجنس خودش میباشد .

٥ - عدد درست (صحیح) عبارتست از اجتماع چند واحد تمام .

٦ - سلسله اعداد طبیعی رشته اعدادیست که از یک شروع شود و در آن هر عدد یک واحد از عدد بلا فاصله قبل از آن بزرگتر باشد . این سلسله بی انتهاست .

۷ - پایه یا مبنای شمار معین میکند که هر واحد مرتبهٔ بالاتر چند برابر واحد مرتبهٔ پائین تر است .

۸ - پایه شمار معمولی ده میباشد و این شمار را شمار دهدهی (اعشاری) میگویند .

۹ - در اعداد دهدهی (اعشاری) ده واحد از هر مرتبه واحد مرتبهٔ بلافاصله بالاتر را تشکیل میدهد .

۱۰ - در هر عدد رقمی که سمت چپ رقم دیگر نوشته شود نمایش مرتبه بلافاصله بالاتر خواهد بود .

II - جمع

۱۱ - در جمع اعداد تغییر محل عوامل جمع تغییری در حاصل جمع نمیدهد.

۱۲ - بجای چند عامل جمع میتوان حاصل جمع آنها را قرار داد، یعنی:

$a + b + c + d + e = (a + b) + (c + d) + e$ .. N

۱۳ - برای امتحان جمع یکی از این طریقه ها عمل باید کرد:

الف - اگر در موقع جمع اعداد را از پائین ببالا جمع کرده باشیم برای امتحان آنها راز بالا بپائین جمع میکنیم.

ب - اعداد رادسته‌دسته نموده هر دسته را جداگانه‌جمع میکنیم و حاصل جمعها را با هم جمع مینمائیم.

III - تفریق

۱٤ - هرگاه یکعدد بعوامل تفریق (مفروق ومفروق منه یا کاسته وکاهشیاب) اضافه یا از آنها کم کنیم در تفاضل تغییری پیدا نمیشود. یعنی:

$(a + c) - (b + c) = a - b$

۱٥ - برای کاستن مجموع چند عدد از یک عدد (یا مجموع چند عدد) میتوان یکایک آنها را ازاین عدد (یا مجموع چند عدد) کاست، یعنی:

$(a + b + c) - (d + e + f) = a + b + c - d - e - f$

۱٦ - امتحان تفریق را میتوان بیکی از طریقه های

زیر انجام داد :

الف - تفاضل را از کاهشیاب کسر میکنیم، کاسته بدست می‌آید .

ب - تفاضل را با کاسته جمع میکنیم، کاهشیاب بدست می‌آید .

۱۱ - ضرب

۱۷ - درضرب دو یا چند عدد تغییر محل عاملهای ضرب درحاصلضرب اثری ندارد ، یعنی : $a \times b \times c = b \times a \times c$

۱۸ - برای ضرب مجموع یا تفاضل چند عدد در یك عدد آن عدد را درهر یك از عوامل جمع یا تفریق ضرب نموده حاصلضربهای جزء را باهم جمع یا ازهم تفریق میکنیم، یعنی : $(a+b+c)\ m = am+bm+cm$

۱۹ - بجای چند عامل میتوان حاصل ضرب آنها را قرارداد، یعنی : $abcdefg = (fbg) \times (da) \times (ec)$

۲۰ - برای ضرب یك عدد در حاصل ضرب چند عدد میتوان آنرا در یکی از عوامل ضرب نموده حاصل را درسایر عوامل ضرب کرد ، یعنی : $abcdef \times n = abc(dn)ef$

۲۱ - برای ضرب حاصل ضرب چند عدد در حاصل ضرب چند عدد دیگر میتوان تمام عوامل را درهم ضرب نموده، یعنی : $abcd \times pq = abcdpq$

۲۲ - در ضرب دو عدد هرگاه یکی از دو عامل ضرب

را چند مرتبه بزرگ یا کوچك کنیم حاصل ضرب نیز همان اندازه بزرگ یا کوچك میشود.

٢٣ – هر گاه یکی از عاملهای ضرب را در عددی ضرب و عامل دیگر را بر همان عدد تقسیم کنیم در حاصل ضرب تغییری حاصل نمیشود.

٢٤ – برای امتحان ضرب جای مضروب (پس شمرده) و مضروب فیه (پس شمار) را باهم عوض میکنیم و عمل ضرب را تکرار مینمائیم.

٣ – تقسیم

٢٥ – در هر تقسیم اگر حاصل ضرب بهر (خارج قسمت) در بخشیاب (مقسوم علیه) را با باقیمانده جمع کنیم بخشی (مقسوم) بدست میآید. یعنی اگر [illegible] بخشی و [illegible] بخشیاب و [illegible] بهر و ٢ باقیمانده باشد: [illegible]

و همچنین [illegible]

٢٦ – اگر مقسوم و مقسوم علیه (بخشی و بخشیاب) را بر عددی تقسیم (یا در عددی ضرب) کنیم خارج قسمت تغییری نمیکند ولی باقیمانده بر آن عدد تقسیم (یا در آن عدد ضرب) میشود.

٢٧ – برای تقسیم یك عدد بر حاصل ضرب چند عدد میتوان آنرا بر یکی از عوامل ضرب تقسیم نموده خارج قسمت را بر عامل دوم و خارج قسمت جدید را بر عامل سوم تقسیم کنیم و عمل را ادامه دهیم تا آخرین خارج قسمت

بدست آید .

۲۸ — برای امتحان تقسیم میتوان خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب نموده حاصل را با باقیمانده جمع کرد ، در صورت صحت مقسوم بدست میآید . یا باقیمانده را ازمقسوم کم نمود ، در صورت صحت تفاضل برمقسوم علیه قابل قسمت می باشد .

۷ـ قوای اعداد (توان)

۲۹ — قوه m ام هرعدد عبارتست از حاصل ضرب m مرتبه آن عدد

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ مرتبه}}$$

a را پایه و m را نما گویند.

۳۰ — قوه اول هر عدد مساوی خود آن عدد است یعنی :

$$a^1 = a$$

۳۱ — هر عدد بقوه صفر مساوی است با یک، یعنی :

$$a^0 = 1$$

۳۲ — حاصل ضرب دو قوه با پایه مشترک مساویست با همان پایه بقوهٔ مجموع نماها، یعنی

$$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$$

۳۳ — حاصل ضرب دوقوه با نماهای مشترک مساویست با حاصل ضرب پایه‌ها بقوهٔ همان نمای مشترک. یعنی :

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

۳۴ ــ توان m ام حاصل‌ضرب چند عدد مساویست با حاصل‌ضرب توانهای m ام آن اعداد . یعنی :

$$(abc)^m = a^m . b^m . c^m$$

۳۵ ــ اگر توان m ام عددی را بخواهیم به توان جدیدی برسانیم باید پایه را به توان حاصل ضرب نماها رسانید یعنی :

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

۳۶ ــ خارج قسمت دوقوه مختلف یك عدد مساویست با همان پایه که به توان تفاضل دو نما برسد ، یعنی :

$$a^m : a^n = a^{(m-n)}$$

۳۷ ــ باقیماندهٔ تقسیم قوهٔ m ام هر عدد a بر عدد دیگر b مساویست با باقیمانده قوه m ام باقیمانده تقسیم a بر b . [illegible]

VII ــ مساوی و نامساوی

۳۸ ــ اگر دوطرف دو یا چند تساوی را با یکدیگر جمع یا از یکدیگر تفریق ، در یکدیگر ضرب یا بر یکدیگر تقسیم کنیم نتیجه یك تساوی خواهد بود :

[illegible]

۳۹ – اگر بین دو طرف دو یا چند نا مساوی یکجهت اعمال جمع ، تفریق ، ضرب یا تقسیم بجا آوریم نتیجه همواره یک نا مساوی در همان جهت خواهد بود :

$a > b$ (۱
$c > d$ (۲

$a + c > b + d$ $\qquad$ $a . c > b . d$

تبصره – در صورتیکه اعمال چهارگانه بین چند نساوی و چند نا مساوی یکجهت بعمل آید نتیجه یک نا مساوی در همان جهت خواهد بود .

VIII – بخش پذیری یا قابلیت تقسیم

۴۰ – عددی بر عدد دیگر قابل قسمت است که باقیمانده تقسیمش بر آن صفر باشد. عدد اول را **مضرب** دومی و دومی را **مقسوم علیه** یا **عاد** اولی مینامند و میگویند دومی اولی را عاد میکند .

۴۱ – هر عدد که رقم سمت راست آن صفر یا جفت باشد بر ۲ قابل قسمت است .

۴۲ – هر عدد که دو رقم سمت راست آن صفر باشند یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۴ باشد بر ۴ قابل قسمت است .

۴۳ – عددی بر ۸ قابل قسمت است که سه رقم سمت راست آن صفر بوده یا عددی تشکیل دهند که مضرب ۸ باشد .

۴۴ – عددی بر ۳ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد . اگر تقسیم مجموع ارقام یک عدد بر

۳ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم آن عدد هم بر ۳ همان خواهد بود .

۴۵ – عددی بر ۵ قابل قسمت است که رقم سمت راست آن صفر یا ۵ باشد .

۴۶ – عددی بر ۶ قابل قسمت است که بر ۲ و ۳ قابل قسمت باشد .

۴۷ – عددی بر ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۹ قابل قسمت باشد . اگر تقسیم مجموع ارقام عددی بر ۹ باقیمانده داشته باشد باقیمانده تقسیم عدد هم بر ۹ همان خواهد بود .

۴۸ – عددی بر ۱۱ قابل قسمت است که تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و مجموع ارقام مراتب فردش صفر و یا قابل قسمت بر ۱۱ باشد . و الا باقیمانده تقسیم همان تفاضل یا زیادتی ۱۱ بر آن تفاضل خواهد بود .

مثال : ۱) ۷۹۸۸۸۴۲ بر ۱۱ قابل قسمت است .

۲) ۴۷۵۸ بر ۱۱ قابل قسمت نیست و باقیمانده تقسیم و تفاضل ارقام مراتب زوج و فرد ۶ میباشد .

۳) عدد ۳۵۴۷۵۸۰ بر ۱۱ قابل قسمت نیست و تفاضل مجموع ارقام مراتب زوج و فرد ۳ و باقیمانده تقسیم ۸ یا (۳–۱۱) است

۱۰ – اعداد اول

۴۹ – هر عددی که جز بر خود و یک به عدد دیگری قابل قسمت نباشد عدد اول نامیده میشود .

۵۰ – اعداد اول از ۱ تا ۱۰۰۰ عبارتند از :

١	٢	٣	٥	٧	١١	١٣	١٧	١٩	٢٣	٢٩	٣١	٣٧	٤١
٤٣	٤٧	٥٣	٥٩	٦١	٦٧	٧١	٧٣	٧٩	٨٣	٨٩	٩٧		
١٠١	١٠٣	١٠٧	١٠٩	١١٣	١٢٧	١٣١	١٣٧	١٣٩					
١٤٩	١٥١	١٥٧	١٦٣	١٦٧	١٧٣	١٧٩	١٨١	١٩١					
١٩٣	١٩٧	١٩٩	٢١١	٢٢٣	٢٢٧	٢٢٩	٢٣٣	٢٣٩					
٢٤١	٢٥١	٢٥٧	٢٦٣	٢٦٩	٢٧١	٢٧٧	٢٨١	٢٨٣					
٢٩٣	٣٠٧	٣١١	٣١٣	٣١٧	٣٣١	٣٣٧	٣٤٧	٣٤٩					
٣٥٣	٣٥٩	٣٦٧	٣٧٣	٣٧٩	٣٨٣	٣٨٩	٣٩٧	٤٠١					
٤٠٩	٤١٩	٤٢١	٤٣١	٤٣٣	٤٣٩	٤٤٣	٤٤٩	٤٥٧					
٤٦١	٤٦٣	٤٦٧	٤٧٩	٤٨٧	٤٩١	٤٩٩	٥٠٣	٥٠٩					
٥٢١	٥٢٣	٥٤١	٥٤٧	٥٥٧	٥٦٣	٥٦٩	٥٧١	٥٧٧					
٥٨٧	٥٩٣	٥٩٩	٦٠١	٦٠٧	٦١٣	٦١٧	٦١٩	٦٣١					
٦٤١	٦٤٣	٦٤٧	٦٥٣	٦٥٩	٦٦١	٦٧٣	٦٧٧	٦٨٣					
٦٩١	٧٠١	٧٠٩	٧١٩	٧٢٧	٧٣٣	٧٣٩	٧٤٣	٧٥١					
٧٥٧	٧٦١	٧٦٩	٧٧٣	٧٨٧	٧٩٧	٨٠٩	٨١١	٨٢١					
٨٢٣	٨٢٧	٨٢٩	٨٣٩	٨٥٣	٨٥٧	٨٥٩	٨٦٣	٨٧٧					
٨٨١	٨٨٣	٨٨٧	٩٠٧	٩١١	٩١٩	٩٢٩	٩٣٧	٩٤١					
٩٤٧	٩٥٣	٩٦٧	٩٧١	٩٧٧	٩٨٣	٩٩١	٩٩٧						

جدول اعداد اول معروفست بغربال اراتستن

٥١ – تجزیه یك عدد بعوامل اول تشکیل دهندهٔ آن عدد فقط بیك طریق ممکن است.

٥٢ – دو عدد را نسبت بهم اول گویند وقتی عاد مشترك نداشته باشند، یعنی عددی نتوان یافت که هر دو بر آن قابل قسمت باشند.

۵۳ – هر دو عدد غیر اول اقلاً یک عاد اول خواهند داشت .

۵۴ – رشتهٔ اعداد اول بی پایان است .

۵۵ – هر عدد اولی که عدد دیگر را عاد نکند نسبت بآن اول است .

۵۶ – هر عدد غیر اول حاصلضرب چند عدد اول است. بدست آوردن عوامل اول هر عدد غیر اول را تجزیهٔ آن بعوامل اول گویند .

۸ – بزرگترین عاد (یا مقسوم علیه) مشترک

علامت اختصاری آن بمم میباشد .

۵۷ – دو یا چند عدد میتوانند عاد های مشترک بسیار داشته باشند ؛ آنرا که ازهمه بزرگتر باشد بمم آنها میگویند.

۵۸ – اگر بین دو عدد ، عدد کوچکتر بزرگتر را عاد کند خود آن بمم دو عدد مفروض خواهد بود .

۵۹ – بمم دو عدد بمم عدد کوچکتر و باقیمانده تقسیم عدد بزرگتر بر کوچکتر نیز میباشد .

۶۰ – برای تعیین بممدو عدد عدد بزرگتر را بر کوچکتر تقسیم میکنیم و عدد کوچکتر را بر باقیمانده تقسیم اول و باقیمانده تقسیم اول را بر باقیمانده تقسیم دوم قسمت میکنیم و عمل را بهمین و تیره ادامه میدهیم تا وقتی که عمل تقسیم باقیمانده نداشته باشد . آخرین مقسوم علیه بمم دو عدد مفروض است .

۸	۷	۵	
۶	۴۸	۳۴۲	۱۷۵۸
		۶	۴۸

۶۱ – برای تعیین بهم چند عدد نخست بین دوتای آنها بهم معین میکنیم ، سپس بین این بهم و عدد سوم بهم بدست میآوریم ، آنگاه بین بهم جدید و عدد چهارم . . . و بهمین نحو عمل را ادامه میدهیم تا همه اعداد منظور شوند . آخرین بهم بهم کلیه اعداد است .

۶۲ – ممکنست بهم چند عدد را از راه تجزیه آنها بعوامل اول بدست آورد . برای اینکار پس از تجزیه آن اعداد بعوامل اول مشترک آنها با کوچکترین نما را درهم ضرب میکنیم .

۱۷۵۸ = ۲ × ۳ × ۲۹۳

۳۴۲ = ۲ × ۳۲ × ۱۹

بهم آنها = ۲ × ۳

۶۳ – اگر دو عدد در عددی ضرب (یا بر عددی تقسیم) شوند بهم آنها نیز چنین خواهد شد .

۸۱ – کوچکترین مضرب مشترک

علامت اختصاری آن «کمم»

۶۴ـ دو یا چند عدد مضرب‌های مشترک بیشمار دارند . آنرا که از همه کوچکتر باشد کمم آنها میگویند .

۶۵ ـ کمم چند عدد که نسبت بهم اول باشند حاصلضرب آنهاست .

۶۶ ـ اگر دو عدد درعددی ضرب (یا بر عددی تقسیم) شوند کمم آنها نیز چنین خواهد شد .

۶۷ ـ کمم بین دو عدد عبارتست ازخارج قسمت تقسیم حاصل ضرب آن دو عدد بر بمم آنها .

۶۸ ـ کمم بین چند عدد باینطریق بدست میآید که اول بین دوتای آنها کمم تعیین نموده و بعد بین این کمم و عدد سوم کمم تعیین میکنیم و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا کمم بین تمام آن اعداد بدست آید .

۶۹ ـ کوچکترین مضرب مشترک اعدادی که بعوامل اول تجزیه شده اند عبارتست از حاصل ضرب عوامل اول مشترک و غیرمشترک آنها که دارای بزرگترین نما باشند .

۱۱ ـ برخه یا کسر

۷۰ ـ هرگاه یکه (واحد) را به n قسمت مساوی کنیم و m قسمت از آنرا اختیار نمائیم گوئیم برخه‌ای یا کسری از واحد مساوی $\frac{m}{n}$ آن را اختیار کرده‌ایم .

n را برخه نام یا مخرج و m را برخه‌شمار یا صورت گویند .

هرگاه n قوه‌ای از ۱۰ باشد برخه را دهدهی یا

اعشاری و گرنه آنرا **متعارفی** میگویند .

اگر m از n بزرگتر باشد $\frac{m}{n}$ را **برخه نما** مینامند .
چنانچه با برخه عدد صحیحی همراه باشد یك **عدد برخگی** خواهیم داشت ، مانند $2\frac{3}{5}$

• m و n ممکنست عدد صحیح یا کسر باشند .

۷۱ – **نسبت دو طول** – هرگاه برای اندازه گرفتن دوطول l و l' واحدمشترکی بکار رود و l شامل m مرتبه و l' شامل n مرتبه‌واحد مشترك باشد نسبت دو طول l و l' عبارتست از برخه $\frac{m}{n}$.

خواص عمومی

۷۲ – حاصل ضرب طولی مانند l در عدد n عبارتست از حاصل جمع n طول مساوی l .

۷۳ – حاصل ضرب طولی مانند l در $\frac{1}{n}$ یعنی عکس n عبارتست از طول حاصل از تقسیم l به n قسمت مساوی .

۷۴ – حاصل ضرب طولی مانند l در کسر $\frac{m}{n}$ عبارتست از $\frac{m}{n}$ طول l ، یعنی برای بدست آوردن این حاصل‌ضرب باید l را در m ضرب و حاصل را بر n تقسیم نمود یا l را بر n تقسیم وخارج قسمت را در m ضرب کرد .

۷۵ – هرگاه دوجمله کسری (صورت و مخرج) را در

یک عدد (یا بر یک عدد) ضرب (یا تقسیم) کنیم حاصل کسری است مساوی کسر مفروض.

۷۶ – هرگاه صورت کسری را در عددی ضرب نمائیم کسر در آن عدد ضرب میشود.

۷۷ – هرگاه مخرج کسری را در عددی ضرب نمائیم کسر بر آن عدد تقسیم میشود.

۷۸ – هرگاه صورت کسری را بر عددی تقسیم نمائیم کسر بر آن عدد تقسیم میشود.

۷۹ – هرگاه مخرج کسری را بر عددی تقسیم نمائیم کسر در آن عدد ضرب میشود.

۸۰ – برای اینکه دو کسر [illegible] و [illegible] برابر باشند لازم و کافیست که [illegible] باشد.

۸۱ – کسری را میگویند بساده‌ترین صورت در آمده یا غیر ممکن التحویل شده است که صورت و مخرجش عاد مشترکی نداشته باشند یعنی نسبت بهم اول باشند.

۸۲ – چند کسر را میگویند مخرج مشترک دارند که مخرجهای همه یکی باشد.

۸۳ – برای تحویل چند کسر بکوچکترین مخرج مشترک باید:

۱ – هر کسر را بساده‌ترین صورت در آورد،

۲ – سپس بین مخرجها کم تعیین کرد،

۳ – کم را بر مخرج هر کسر تقسیم و خارج قسمت را در دو عامل کسر ضرب نمود.

تبصره — هرگاه در قسمت ۲ بجای کم مخرجها یك مضرب مشترك آنهارا بدست آوریم کسرها بیك مخرج تحویل خواهند شد نه بکوچکترین مخرج مشترك .

جمع و تفریق برخه‌ها

۸٤ — مجموع یا تفاضل چند کسر که یك برخه نام (مخرج) داشته باشند کسریست که صورتش مجموع یا تفاضل صورتها و مخرجش مخرج مشترك کسرهای مفروض باشند .

تبصره — اگر کسرها یك مخرج نداشته باشند نخست آنها را بیك مخرج تحویل میکنیم .

ضرب برخه‌ها

۸۵ — حاصلضرب دو یا چند کسر کسریست که صورتش حاصلضرب صورتها و مخرجش حاصلضرب مخرجها باشد .

[illegible]

تقسیم کسرها

۸۶ — برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر کسر مقسوم علیه را معکوس نموده بین آنها عمل ضرب بجا میآوریم :

[illegible]

۸۷ — هر عدد صحیح را میتوان کسری دانست که مخرجش ۱ باشد . با این فرض قواعد راجع باعمال اصلی در کسرها را میتوان در اعداد صحیح نیز جاری دانست .

برخه‌های دهدهی

۸۸ – مجموع و تفاضل عددهای دهدهی ممکن است عدد صحیح یا دهدهی باشد .

۸۹ – حاصلضرب دو عدد دهدهی همیشه عدد بست دهدهی

۹۰ – خارج تقسیم دو عدد دهدهی ممکن است عددی صحیح یا کسر دهدهی یا کسر متعارفی باشد .

تبدیل کسر دهدهی بمتعارفی و بعکس

۹۱ – هر کسر دهدهی را میتوان بصورت کسر متعارفی نوشت : ۲۳/۴۰ = ۵۷۵/۱۰۰۰ = ۰٫۵۷۵

۹۲ – هر کسر متعارفی را میتوان بوسیله تقسیم کردن صورت بر مخرج بصورت کسر دهدهی در آورد :

۲۳/۲۵ = ۰٫۹۲

کسر متعارفی را **مولد** کسر دهدهی میگویند

۹۳ – اگر مخرج کسر متعارفی فقط مضرب قوای مختلف ۲ و ۵ باشد تقسیم صورت بر مخرج بطور صحیح انجام میگیرد یعنی بالاخره باقیماندهٔ تقسیم صفر میشود . اما اگر مخرج شامل عواملی غیر از ۲ و ۵ باشد باقیمانده تقسیم ، هر قدر هم عمل را ادامه دهیم ، هیچگاه صفر نمیگردد و چون بعد از یک یا چند عمل باقیمانده ای برابر یکی از باقیمانده‌های سابق بدست خواهد آمد یک عده ارقام مرتبا در خارج قسمت تکرار خواهند شد . چنین برخه‌ای را **برخهٔ دوری** یا **کسر متناوب** گویند .

مثال ۱ : ... ۰/۶۶۶ = ۲/۳

۲ ... ۰/۷۱۴۲۸۵ ۷۱۴۲۸۵ = ۵/۷

در برخه دوری پیکرهائی را که تکرار میشوند دوره گردش نامند در مثال ۱ دوره گردش ۶ و در مثال ۲ ۷۱۴۲۸۵ است.

۹۴ - برخه دوری را ساده گویند اگر دوره گردش بی‌فاصله بعد از ممیز شروع شود (مثالهای بالا) و مرکب خوانند اگر بین ممیز و دوره گردش یک دوره غیر گردش یعنی عددی باشد که تکرار نشود.

مثال ... ۰/۳۵۷۱۴۲۸ ۵۷۱۴۲۸ = ۵/۱۴

۹۵ - برای نوشتن بعد از ممیز دوره غیر گردش و بعد دورهٔ گردش را یک بار نوشته پس از آن چند نقطه میگذاریم

۹۶ - برخه متعارفی وقتی ببرخه دوری ساده قابل تبدیل است که در مخرجش هیچ عامل ۲ و ۵ نباشد و وقتی که در مخرجش عامل ۲ یا ۵ و عوامل دیگر باشند ببرخه دوری مرکب تبدیل میگردد.

۹۷ - کسر مولد کسر اعشاری دوره ساده کسری است که صورتش یک دوره گردش و مخرجش بعده دوره گردش ۹ باشد.

۹۸ - صورت کسر مولد کسر اعشاری متناوب مرکب بدین طریق بدست میآید که دوره غیر گردش را نوشته و دنبال آن یک دوره گردش را بنویسیم بعد از این عدد که حاصل میشود عدد حاصل از دوره غیر گردش را کم کنیم این

تفاضل صورت کسر مولد است مخرج کسر مولد کسر اعشاری متناوب مرکب به نظر بدست میآید که بعدهٔ دوره گردش ۹ نوشته و بعدهٔ دورهٔ غیر گردش صفر در جلوی آن بگذاریم

XIII نسبت و تناسب :

۹۹ — نسبت دو عدد a و b عبارت است از خارج قسمت $\frac{a}{b}$ اعداد a و b میتوانند صحیح یا کسری باشند .

۱۰۰ — تساوی دو نسبت را یك تناسب گویند مانند

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

تناسب مذکور را میتوان بصور زیر نوشت :

۱ — $a.d=c.b$

۲ — $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ و $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ و $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$ و $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ ، $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ، $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

۳ — $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ ، $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

۴ — $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

۱۰۱ — از چند نسبت مساوی $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ .... روابط زیر نیز نتیجه میشود :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{\pm a \pm b \pm c \pm d}{\pm a' \pm b' \pm c' \pm d'}$$

۱۰۲ ـ اگر چند نسبت نامساوی $\frac{a}{a'}$ و $\frac{c}{c'}$ و $\frac{d}{d'}$ و $\frac{b}{b'}$ در دست باشند نسبت $\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'}$ محصور است بین بزرگترین و کوچکترین کسور مفروض .

۱۰۳ ـ اگر بصورت و مخرج کسر کوچکتر از واحد $\frac{a}{b}$ یك عدد c بیفزائیم کسر بزرگتر میشود ولی باز از ۱ کوچکتر است یعنی هرگاه $1 > \frac{a}{b}$ باشد $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

۱۰۴ ـ ولی هرگاه $\frac{a}{b} > 1$

$$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$$

۱۰۵ ـ واسطه عددی A بین دو عدد a و b عبارتست از :

$$A = \frac{a+b}{2}$$

همچنین واسطه عددی A بین n عدد a و b و c و ... و l عبارتست از :

$$A = \frac{a+b+c+\ldots+l}{n}$$

اجزاء : دسیمتر مربع = ۰/۰۱ ، سانتیمتر مربع = ۰/۰۰۰۱ ، کیلومتر مربع = ۱۰۰۰۰۰۰/۰ متر مربع

واحد اراضی زراعتی : آر = دکامتر مربع

اضعاف : هکتار = ۱۰۰ آر = هکتو متر مربع

اجزاء : سانتی آر = ۰/۰۱ آر = متر مربع

تبصره : در مقیاس سطح اضعاف و اجزاء صد بصد بزرگ و کوچک میشوند .

۱۱۱ - حجم

واحد : متر مکعب

اضعاف : متداول نیستند

اجزاء : دسیمتر مکعب = ۰/۰۰۱ ، سانتیمتر مکعب = ۰/۰۰۰۰۰۱ ، میلیمتر مکعب = ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱ متر مکعب .

تبصره : در مقیاس حجم اضعاف و اجزاء هزار بهزار بزرگ و کوچک میشوند .

۱۱۲ - پیمانه

واحد : لیتر = یک دسیمتر مکعب

اضعاف : دکالیتر = ۱۰ ، هکتولیتر = ۱۰۰ ، کیلو لیتر = ۱۰۰۰ لیتر

اجزاء : دسیلیتر = ۰/۱ ، سانتیلیتر = ۰/۰۱ ، میلیلیتر = ۰/۰۰۱ لیتر

۱۱۳ - وزن

واحد : گرم = وزن یک سانتیمتر مکعب آب مقطر ۴ درجه حرارت

اضعاف : دکاگرم = ۱۰ ، هکتوگرم = ۱۰۰ ، کیلوگرم = ۱۰۰۰ گرم .
کنتال = ۱۰۰ کیلوگرم ، تن = ۱۰۰۰ کیلوگرم
اجزاء : دسی گرم = ۰/۱ ، سانتیگرم = ۰/۰۱ ، میلی گرم = ۰/۰۰۱ گرم

برای جواهرات : قیراط = ۲۰ سانتیگرم

بستگی بین وزن و حجم

۱ گرم معادلست با وزن یك سانتیمتر مکعب آب مقطر ٤ درجه
۱ کیلوگرم » » یك دسیمتر » »
۱ تن » » یك متر » »

گرم و سانتیمتر مکعب ، کیلوگرم و دسیمتر مکعب ، تن و متر مکعب را یکه‌های متناظر گویند

۱۱۵ - وزن مخصوص یك جسم عبارتست از وزن یکهٔ حجم در صورتیکه وزن با یکهٔ متناظر آن بیان شود .

وزن مخصوص برخی اجسام مهم :

۱	چوب پنبه	۰/۲٤	۸	آلومینیم	۲/٦
۲	چوب	۰/٦۹–۱/۰۳	۹	آنتیموان	٦/۸
۳	بنزین	۰/٦۹–۰/۷۱	۱۰	روی	۷/۲
٤	نفط	۰/۷٦	۱۱	چدن	۷/۱–۷/۳
٥	الکل	۰/۸۱	۱۲	قلع	۷/۲
٦	یخ	۰/۸۸–۰/۹۲	۱۳	آهن	۷/۸٥
۷	آب	۱/-	۱٤	فولاد نرم	۷/۸٦

۱۵	مازوت	۰/۹ ـ ۱/۱	۲۵	مفرغ	۸/۴ ـ ۸/۷
۱۶	اسفالت	۱/۱ ـ ۱/۵	۲۶	نیکل	۸/۸۵
۱۷	ذغال سنگ	۱/۲ ـ ۱/۵	۲۷	مس	۸/۹
۱۸	کلك	۱/٤	۲۸	نقره	۱۰/۵
۱۹	آجر	۱/٤ ـ ۱/٦	۲۹	سرب	۱۱/۳
۲۰	خاك رس	۱/٦ ـ ۲/	۳۰	جیوه	۱۳/٦
۲۱	بتن	۱/۸ ـ ۱/٤٥	۳۱	طلا	۱۹/۳۲
۲۲	سیمان	۱/۹	۳۲	پلاتین	۲۱/۲
۲۳	شیشه	۲/٤ ـ ۲/٦			
۲٤	سنگ	۲/۵ ـ ۳/۰۸			

۱۱۶ ـ پول :

شماره ترتیب	مشخصات	عیار	وزن بگرم — غیر خالص	وزن بگرم — خالص
	طلا			
۱	یك پهلوی	۹۰۰ در ۱۰۰۰	۸٫۱۳۵۶۸	۷٫۳۲۲۳۸۴۳
۲	نیم پهلوی	۹۰۰ در ۱۰۰۰	۴٫۰۶۷۹۹	۳٫۶۶۱۱۹۱
	پشیز			
	نقره			
۳	ده ریال	۶۰۰ در ۱۰۰۰	۱۶٫—	۹٫۶۰
۴	پنج ریال	۶۰۰ در ۱۰۰۰	۸٫—	۴٫۸۰
۵	دو ریال	۶۰۰ در ۱۰۰۰	۳٫۲۰	۱٫۹۲
۶	یك ریال	۶۰۰ در ۱۰۰۰	۱٫۶۰	۰٫۹۶
	برنز آلومینیوم			
۷	پنجاه دینار	مس ۹۱ درصد	۳٫۴۹	—
۸	ده «	مس قره ۸ درصد	۳٫۰۶۸	—
۹	پنج «	آلومینیوم	۱٫۹۶۵	—
	مس			
۱۰	پنجاه دینار	—	۳٫۴۹	—

۱۱۷ مقیاسهای سابق

طول : واحد : ذرع
اضعاف : فرسنگ = ۶۰۰۰ ذرع
اجزاء : چارک = ۱/۴ ذرع ، گره = ۱/۱۶ ذرع ، بهر ۱/۳۲ ذرع

وزن : واحد : من
اضعاف : ری = ۴ من ، خروار = ۱۰۰ من
اجزاء : چارک = ۱/۴ من ، سیر = ۱/۴۰ من
مثقال = ۱/۱۶ سیر : نخود = ۱/۲۴ مثقال : گندم = ۱/۴ نخود

۱۱۸ - رابطه بین مقیاسهای فعلی و قدیم

ذرع = ۱/۰۴ متر

گندم	نخود	مثقال	سیر	من	خروار
گرم ۰/۴۸	۵				
۷۵ گرم			۱		
۷۵۰ گرم			۱۰		
یک کیلو گرم	۸	۵	۱۳		
سه «				۱	
سیصد «					۱
یک تن	۸	۵	۱۳	۳۳	۳

گندم = ۰/۰۴۸۸۲۸۱ گرم سیر = ۷۵ گرم
نخود = ۰/۱۹۵۳۱۲۵ « من = ۳ کیلوگرم
مثقال = ۴/۶۸۷۵ « خروار = ۳۰۰ «

۹ - زمان

واحد : روز = مدت حرکت وضعی زمین

اجزاء : ساعت = $\frac{1}{24}$ روز دقیقه = $\frac{1}{60}$ ساعت ثانیه = $\frac{1}{60}$ دقیقه

اضعاف: هفته = ۷ روز ماه = ۲۹ ، ۳۰ یا ۳۱ روز
سال شمسی = ۳۶۵ روز یا ۳۶۶ روز (در سال کبیسه)
سال قمری = ۳۵۴ یا ۳۵۵ روز («)
قرن = صد سال

سال شمسی ایرانی : شروع: اول فروردین مصادف با عبور کره زمین از نقطه اعتدال ربیعی و روز اول بهار

سال شمسی ایرانی: ۱۲ ماه دارد از فروردین تا شهریور ۳۱ روز ، از مهر تا بهمن ۳۰ روز اسفند در سال عادی ۲۹ و در سال کبیسه ۳۰ روز

سال قمری عربی : ۱۲ ماه دارد که متناوباً ۳۰ و ۲۹ روز دارند : (محرم ، صفر ، ...)

سال شمسی میلادی: شروع اول ژانویه مساوی ۱۱ دی
ماهها ژانویه (۳۱) فوریه (۲۸ یا ۲۹) مارس (۳۱) آوریل (۳۰) مه (۳۱) ژوئن (۳۰) ژوئیه (۳۱) اوت (۳۱) سپتامبر (۳۰) اکتبر (۳۱) نوامبر (۳۰) دسامبر (۳۱)

تبصره : در تقویم فرنگی سالهائی که عددشان به ۴ قابل قسمت باشد کبیسه‌اند جز آنها که بادو صفر ختم میشوند

که در اینصورت اگر عدد سال صرف نظر از صفرها به ۴ قابل قسمت باشد سال کبیسه است و الا ساده.

در تقویم ایرانی در هر دوره ۳۳ ساله سالهای ۴ و ۸ و ۱۲ و ۱۶ و ۲۰ و ۲۴ و ۲۸ و ۳۳ کبیسه است و سایر سالها ساده

مطابقت تاریخها :

اول فروردین ۱۳۲۶ شمسی هجری درسال ۱۹۴۷ میلادی و ۱۳۶۶ هجری قمری واقع میشود.

۱۷ — اعداد مرکب

۱۲۰ — تعریف: مقیاساتی را که با اجزاء و اضعاف بستگی دهدهی ندارند اعداد مرکب گویند. مانند ساعت و دقیقه و ثانیه یا درجه دقیقه ثانیه یا اندازه های سابق ایران،

۱۲۱ — در اعمال حسابی مربوط باعداد مرکب همیشه تبدیل یکه‌ها بیکه‌های بالاتر یا پائین‌تر لازم میآید و این کار بوسیله ضرب و تقسیم صورت میگیرد.

۱۲۲ — افزایش — در جمع اعداد مرکب بایستی یکه‌های هم نوع را زیرهم نوشت و جمع کرد و بمجرد اینکه مجموع معادل یا بزرگتر از یکه بالاتر باشد آن را از جنس آن یکه کرد.

۱۲۳ کاهش — اگر اعداد نماینده یکه های مختلف در کاهشیاب بزرگتر از اعداد نظایر خود در کاسته باشند عمل بسهولت انجام پذیر است.

هرگاه یکی از اعداد نماینده یکه های مختلف در کاهشیاب کوچکتر از عدد نظیر خود در کاسته باشد باید در کاهشیاب یك یکهٔ مرتبه بعد را از جنس یکهٔ مرتبه پائین کرد و بآن افزود آنگاه عمل کاهش را بجا آورد .

۱۲٤ ضرب – برای ضرب اعداد مرکب در یك عدد آن عدد را در هر یك از اعداد نماینده یکه‌های مختلف ضرب نموده در حاصل ضرب یکه‌ها را در صورت احتیاج بیکهٔ بالاتر تبدیل میکنیم .

۱۲۵ تقسیم – برای تقسیم اعداد مرکب بر یك عدد، ابتدا از عدد نمایندهٔ بزرگترین یکه شروع کرده عمل تقسیم را بجا می‌آوریم بهره را نوشته باقیمانده را از جنس یکه مرتبه پائین کرده برعدد نمایندهٔ همان یکه در بخشی افزوده در مجموع عمل تقسیم را انجام میدهیم ، باقیمانده جدید را از جنس یکهٔ مرتبهٔ کوچکتر کرده و عمل را آنقدر ادامه میدهیم تا تقسیم به پایان رسد .

XVI اربعه متناسبه

۱۲٦ تعریف – مراد از اربعهٔ متناسبه یا بطور مختصر تناسب قواعدی است که بمدد آن مسائلی حل میشود که در آنها کمیتی نسبت مستقیم یا معکوس با چند کمیت دیگر داشته باشد و از آن کمیت یك مقدار معلوم در دست بوده و بمدد نسبت‌های مفروض باید یك مقدار مجهول آنرا بدست آورد .

۱۲۷ – هرگاه تعداد عوامل معلوم و مجهول از ٤

تجاوز نکند تناسب مفرد و اگر عدد آنها بیش از ٤ باشد تناسب را مرکب گویند .

۱۲۸ - هر گاه در تناسب ، نسبت بین کمیات مستقیم باشد تناسب را مستقیم و الا **معکوس** گویند .

۱۲۹ **قاعده** - برای حل تناسب مفرد مستقیم مقدار همجنس کمیت مجهول را در نسبت معکوس دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم

۱۳۰ - **قاعده** - برای حل تناسب مفرد معکوس مقدار هم جنس کمیت مجهول را در نسبت مستقم دو مقدار کمیت دیگر ضرب میکنیم .

۱۳۱ **قاعده** - برای حل مسائل تناسب مرکب کمیتی را که یك مقدار آن مجهول است پی در پی باهر دو مقدار همجنس از کمیات دیگر می سنجیم و بمورد نسبت مستقیم یا نسبت معکوس دو بدو آن مقادیر را تشکیل داده مقدار همجنس مجهول را در حاصلضرب کلیه نسبتها ضرب می کنیم تا مقدار مطلوب بدست آید

XVII - آمیزه و آلیاژ

۱۳۲ - هر گاه چند نوع از کالائی را که بهای آن مختلف باشد با هم بیامیزیم کالای آمیخته دارای بهای خاصی است که « **بهای متوسط** » یا نرخ متوسط نامیده میشود . مقداری را که از هر نوع کالای مفروض برداشته ایم نسبت آمیزش گویند

مسائل آمیزه بر دو نوعند : ۱ - نسبت آمیزش معلوم است ، باید بهای متوسط را یافت . ۲ - بهای متوسط معلوم است ، باید نسبت آمیزش را بدست آورد .

۱۳۳ – در مسائل نوع اول برای بدست آوردن نرخ متوسط قیمت کلیه مقداری را که از هر جنس برداشته میشود حساب نموده حاصل جمع قیمتها را بر مجموع مقدار کالا تقسیم مینمائیم

۱۳۴ – وقتی نرخ اجناس و نرخ متوسط در دست باشد برای بدست آوردن نسبتی که از هر جنس باید برداشت باینطریق عمل میکنیم: میزان سود یا زیان حاصل از هر نوع جنس را تعیین نموده سودها را با هم و زیانها را با هم جمع می کنیم بعد به نسبت مجموع زیانها از اجناس سود بخش و به نسبت مجموع سودها از جنس های زیان بخش برداشته باهم مخلوط میکنیم.

۱۳۵ آلیاژ – جسمی است که از ذوب چند فلز با یکدیگر بدست آید. هرگاه از یك فلز گرانبها مانند زر یا نقره با فلز دیگری چون مس آلیاژی ترکیب کنیم مقدار فلز قیمتی را که در هر هزار جزء آلیاژ وجود دارد عیار آن نامند

۱۳۶ – برای بدست آوردن وزن فلز قیمتی در یك آلیاژ کافی است وزن آلیاژ را در عیار آن ضرب کرد.

۱۳۷ – مسائل آلیاژ مانند مسائل آمیزه حل میشوند.

XVIII مرابحه مفرد (بهره کاری)

۱۳۸ – معمولا هر کس پولی بوام بگیرد برای آن کرایه‌ای قائل میشود که بهره یا ربح نام دارد.

۱۳۹ – بهره نسبت مستقیم با سرمایه، با مدتی که سرمایه در مرابحه بوده است و با نرخ دارد. نرخ یعنی میزان

اجاره واحدیکه درزمان معینی برای سرمایه‌معینی قابل‌میشوند.
نرخ فرنگی یا در صد یعنی سود ۱۰۰ ریال در یکسال
نرخ ایرانی یعنی سود ۱۰۰ ریال در یك ماه

۱٤۰ – برای تبدیل نرخ ایرانی بنرخ در صد کافیست آنرا برحسب شاهی (۵ دینار) بیان نمود و در ٦ ضرب کرد
مثال: نرخ تومانی (ده‌ریال) چهارشاهی در ماه برابر است با ٦ × ٤ یعنی ۲٤٪ در سال.

۱٤۱ – اگر سرمایه را س، مدت را م، نرخ را ن و بهره را ب بنامیم و مدت را برحسب سال بیان کنیم:

$$\text{ب} = \frac{\text{ن} \times \text{م} \times \text{س}}{100} \qquad \text{س} = \frac{\text{ب} \times 100}{\text{ن} \times \text{م}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{ب} \times 100}{\text{ن} \times \text{س}} \qquad \text{ن} = \frac{\text{ب} \times 100}{\text{م} \times \text{س}}$$

تبصره – در مسائل بهره کاری یك سال ۳٦۰ و ماه ۳۰ روز حساب میشود.

۱٤۲ — در مرابحه مفرد سرمایه ثابت است یعنی سود سالیانهٔ آن بآن افزوده نمی شود.
در نوع دیگری از مرابحه در آخر سال سود سالیانه را بسرمایه اضافه میکنند. آنرا مرابحه یا (بهره کاری) مرکب گویند (رجوع شود بقسمت جبر)

XIX تنزیل

۱٤۳ – در بازرگانی اغلب بجای پول نقد باشخاص سندی داده میشود که در تاریخ معینی قابل پرداخت است و اگر دارندهٔ

آن سند بخواهد زود تر از آن تاریخ که بسر رسید موسوم است سند را بپول تبدیل کند باید مبلغی بنام تنزیل کسر کند و بقیه را دریافت دارد . مبلغی را که در سند بازرگانی نوشته شده **ارزش اسمی** و مبلغی که بعد از کسر تنزیل پرداخته میشود **ارزش فعلی** آن است .

۱٤٤ — تنزیل با ارزش اسمی و مدت و نرخ تنزیل نسبت مستقیم دارد و مسائل آن عینا مانند مرابحه حل میشود .

۱٤٥ — اگر تنزیل از ارزش اسمی سند کسر شود **تنزیل بیرونی** و اگر از ارزش فعلی کسر شود **تنزیل درونی** نامیده میشود

۱٤٦ — تنزیل درونی عادلانه تر است ولی متداول نیست

$$\text{تنزیل درونی} = س - \frac{س \times ۱۰۰}{۱۰۰ + \frac{ن \times م}{۳٦۰}}$$

XX جذر

۱٤٧ — تعریف جذر — جذر یا ریشه دوم هر عدد ٨ عددیست a که $(a+1)^2 > 8 \geq a^2$

۱٤٨ — برای استخراج جذر اعدادی بین ۱ و ۱۰۰ در نظر داشتن جذر اعداد یک رقمی که عبارتند از :

جذر	۱	۲	۳	٤	٥	٦	٧	٨	٩	۱۰
مجذور	۱	٤	٩	۱٦	۲٥	۳٦	٤٩	٦٤	٨۱	۱۰۰

لازم است جذر اعدادی که بین دو عدد پیاپی از سطر دوم قرار دارند بین دو عدد نظیر شان از سطر اول میباشد و جذر

تقریبی آنها تا یك یکهٔ تقریب بآسانی بدست میآید .

۱۴۹ — برای استخراج جذر اعداد از ۱۰۰ ببالا تا یك یکهٔ تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات دو رقمی تقسیم میکنیم جذر قطعهٔ اول سمت چپ را تعیین مینمائیم و مجذور آنرا از همان قطعهٔ اول سمت چپ کم میکنیم و قطعهٔ دوم را درسمت راست این باقیمانده پائین میآوریم و یك رقم از سمت راست عدد حاصل جدا نموده جزء سمت چپ را بر دو برابر رقم جذر اولین قطعه سمت چپ تقسیم میکنیم خارج قسمت دومین رقم جذر عدد مفروض یا بزرگتر از آنست . برای امتحان آنرا در سمت راست دو برابر اولین رقم جذر نوشته حاصل را در خود آن عدد ضرب میکنیم و از عددی که از اولین باقیمانده و قطعهٔ دوم تشکیل شده است کم میکنیم ؛ اگر تفریق ممکن شد رقم امتحان شده رقم دوم جذر است و آن را در سمت راست رقم اول جذر مینویسیم والا یك واحد از آن کاسته مجدداً امتحان میکنیم تا وقتی که تفریق ممکن شود آنوقت قطعهٔ دیگر را در سمت راست باقیمانده فرود آورده بطریق بالا عمل میکنیم تا بهمین طریق تمام قطعات بکار رود مثال :

۱۱۷۳۳۸	۳۴۲	
۹	٦۴ ×	٦۸۲ ×
۲۷۳	۴	۲
۲۵٦	۲۵٦	۱۳٦۴
۱۷۳۸		
۱۳٦۴		
۳۷۴		

عدد ۳۴۲ جذر و ۳۷۴ باقیمانده است

۱۵۰ – برای استخراج جذر اعداد دهدهی تا یك یکهٔ تقریب از جزء دهدهی صرف نظر نموده جذر قسمت درست را تا یك یکهٔ تقریب استخراج میکنیم و جزء دهدهی را به باقیمانده جذر میافزائیم .

مثال :

√۷،۹۵ر۷۷۲،٤	۲۸
۳۹۵	٤۸ ×
۳۸٤	۸
۱۱ر۷۷۲٤	۳۸٤

عدد ۲۸ جذر و ۱۱ر۷۷۲٤ باقیمانده است .

۱۵۱ – برای استخراج جذر یك عدد درست یا دهدهی تا ۱ر۰ یا ۰۱ر۰ یا ... تقریب عدد را از ممیز بطرف راست و چپ بقطعات دو رقمی تقسیم نموده و قطعات سمت راست (بعد از ممیز) را با گذاردن یك یا چند صفر کامل میکنیم بطریقی که به تعداد رقمهای دهدهی که میخواهیم در جذر داشته باشیم بعد از ممیز قطعه دو رقمی باشد؛ مثلا اگر منظور محاسبه جذر تا ۰۰۱/۰ تقریب است باید بعد از ممیز ٦ رقم داشته باشیم . بعد جذر را بقاعده بالا تعیین نموده وقتی در عدد بممیز رسیدیم در جذر نیز ممیز میگذاریم و عمل را مانند وقتی که ممیز نباشد ادامه میدهیم .

مثال – جذر ٤۹۵ر۵ تا ۰۱ر۰ تقریب :

√۴،۹۵،۰۰،۰۰	۲۲٫۲۴		
۴	۴۲ ×	۴۴۲ ×	۴۴۴۴ ×
۰۹۵	۲	۲	۴
۸۴	۸۴	۸۸۴	۱۷۷۷۶
۱۱۰۰			
۸۸۴			
۲۱۶۰۰			
۱۷۷۷۶			
۳۸۲۴			

عدد ۲۲/۲۴ جذر و ۰/۳۸۲۴ باقیمانده است.

۱۵۲ - امتحان جذر:
جذری را که استخراج شده است مجذور نموده با باقیمانده جمع میکنیم، در صورت صحت باید خود عدد بدست آید.

XII - کعب

۱۵۳ - کعب یا ریشه سوم عدد n عددی است بقسمی که
$(\sqrt[3]{n})^3 = n$

۱۵۴ - برای استخراج کعب اعداد واقع بین ۱ و ۱۰۰۰ در نظر داشتن مکعب اعداد یک پیکری که عبارتند از

کعب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
مکعب	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶	۳۴۳	۵۱۲	۷۲۹	۱۰۰۰

لازم است و کعب اعدادی که بین دو عدد پیاپی از سطر دوم قرار دارند بین دو عدد نظیرشان از سطر اول میباشد و کعب تقریبی آنها تا یک یکان تقریب بآسانی بدست میآید.

۱۵۵ – برای استخراج کعب اعداد از ۱۰۰۰ ببالا تا یک بیکه تقریب بطریق زیر عمل میکنیم :

عدد را از سمت راست بقطعات سه رقمی تقسیم میکنیم، کعب قطعه اول سمت چپ را تعیین مینمائیم و قطعه دوم را در سمت راست باقیمانده پائین میآوریم، دو رقم از سمت راستش کنار میگذاریم و جزء سمت چپ را بر سه برابر مجذور رقم اول کعب تقسیم میکنیم، رقم خارج قسمت رقم دوم کعب یاقدری بزرگتر است؛ برای امتحان :

اولا، سه برابر مربع اولین رقم کعب را در ۱۰۰ ضرب کرده مینویسیم،

ثانیاً، سه برابر اولین رقم کعب را در عدد امتحان کردنی و در ۱۰ ضرب کرده مینویسیم،

ثالثاً، عدد امتحان کردنی را مربع کرده مینویسیم و این عدد ها را جمع نموده حاصل جمع را در عدد امتحان کردنی ضرب میکنیم، اگر حاصل از عددی که از اولین باقیمانده دو قطعه دوم تشکیل شده قابل تفریق باشد عدد امتحان کردنی همان رقم دوم کعب است والا باید یک واحد از آن حکم و امتحان را تکرار کرد و آنقدر امتحان را تجدید نمود تا تفریق ممکن شود؛ بعد این رقم را در سمت راست کعب قطعه دوم نوشته قطعه سوم را پائین میآوریم و بهمین طریق عمل را تکرار میکنیم تا تمام قطعات بکار روند.

مثال :

۳۱۹	۳۲۴۷۱۳۲۴ ✓
۳ × ۳ ۲ = ۲۷	۲۷
۳ × ۳ ۲ × ۱۰۰ = ۲۷۰۰	۵۴۷۱
۳ × ۳ × ۱۰ = ۱۸۰	۴۷۹۱
۳ ۲ = ۲	۶۸۰۳۲۴
۲۸۸۳	۶۷۰۷۵۹
۳	۰۰۰۹۵۶۵
۵۷۶۸ قابل قبول نیست	
۳ × ۳ ۲ × ۱۰۰ = ۲۷۰۰	
۳ × ۳ × ۱ × ۱۰ = ۹۰	
۱ ۳ = ۱	
۲۷۹۱	
۱	
۲۷۹۱	

۳ × ۳۱ ۲ = ۲۸۸۳

۳ × ۳۱ ۲ × ۱۰۰ = ۲۸۸۳۰۰

۳ × ۳۱ × ۹ × ۱۰ = ۸۳۷۰

۹ ۳ = ۸۹

۲۹۶۷۵۹

۹

۲۹۶ ۷۵۹

عدد ۳۱۹ کعب و ۹۵۶۵ باقیمانده است .

۱۵۶ ـ قاعده استخراج کعب اعداد دهدهی نظیر همان قاعده ایست که در بارهٔ جذر ذکر شد .

۱۵۷ ـ استخراج کعب تا ۰٫۱ یا ۰٫۰۱ یا ۰٫۰۰۱ با تقریب شبیه بهمان است که در جذر گفته شد ، فقط باید قطعات بعد از ممیز بازاء هر یک رقم دهدهی در کعب سه رقم دهدهی در عدد مفروض باشد .

XXII ـ اعداد اصم

۱۵۸ ـ هرگاه در موقع استخراج ریشه دوم یا ریشه سوم یک عدد ، هر قدر عمل را ادامه دهیم باقیمانده مساوی صفر

نشود عدد را اصم یا گنگ گویند . اعداد غیر اصم را منطق یا گویا نامند .

۱۵۹ – بجای اعداد اصم در محاسبات عددی معمولا مقدار تقریبی آنها را بکار میبرند .

۱۶۰ – در مورد جمع و تفریق و ضرب و تقسیم اعداد اصم مقادیر تقریبی آنها را بکار میبریم؛ بدیهی است که نتیجهٔ تقریبی بدست خواهد آمد .

۱۶۱ – ضرب و تقسیم ریشه دوم (جذر) :

۱ – حاصل ضرب دو عامل اصم $\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}$ عبارتست از

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

ممکن است حاصلضرب ریشه‌های دوم دو مقدار اصم مقدار منطقی باشد؛ مثلا : $\sqrt{۱۸} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$

۲ – حاصل ضرب عدد a در عامل اصم $\sqrt{b}$ عبارتست از

$$a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

۳ – خارج قسمت دو عامل اصم $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ عبارتست از

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ممکن است خارج قسمت ریشه‌های دوم دو مقدار اصم مقدار منطقی باشد ؛ مثلا :

$$\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۸}} = \sqrt{\frac{۱۸}{۸}} = \sqrt{\frac{۹}{۴}} = \frac{۳}{۲}$$

۴ – معمولا در محاسبات اگر مخرج کسری رادیکال دوم عدد اصمی باشد باضرب صورت و مخرج کسر در مخرج کسر مخرج را منطق مینمایند؛ مثلا :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a} \quad و \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-b} = \frac{\sqrt{a}+b}{a-b^{2}} \quad و \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

پایان

۱ – تعاریف

۱ – جبر علمی است که برای تعمیم دستورها و تسهیل حل مسائل بکار میرود.

۲ – حرفها – در جبر مقادیر معلوم را معمولا با حروف اول الفباء لاتین (a و b و c و ....) و مقادیر مجهول را با حروف آخر (x و y و z و غیره) نمایش میدهند.

۳ – نشانه‌ها – نشانه‌ها یا علامات برای نشاندادن اعمال یا رابطه‌هائی که باید بین اعداد و حروف برقرار باشد بکار میروند.

علامت $+$ نشانه جمع، علامت $-$ نشانه تفریق، علامت $\times$ یا $\cdot$ نشانه ضرب و علامت : یا — نشانه تقسیم دو عدد میباشند.

علامت $=$ نشانه مساوی بودن و علامت $\neq$ نشانه اختلاف، و علامت $<>$ نشانه بزرگتر یا کوچکتر بودن است بطوری که در داخل زاویه عدد بزرگتر و بیرون زاویه عدد کوچکتر نوشته میشود مثلا $a>b$ نشان میدهد که b کوچکتر است از a. و $a \geqq b$ نشان میدهد که a بزرگتر یا اقلا مساوی b میباشد. وقتی مقادیری با علامت $+$ یا $-$ یا $\times$ یا : درداخل پرانتز ( ) یا کروشه [ ] یا آکولاد { } قرار داشته

باشند حکم مقدار واحد را پیدا میکنند .

علامت $\sqrt[n]{}$ علامت استخراج ریشه n ام مقدار واقع در زیر $\sqrt{}$ است .

۴ – **یاد آوری** – باید متذکر بود که در موقع حساب کردن هر عبارتی که در آن اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم باشد باید اول اعمال ضرب و تقسیم و بعد اعمال جمع و تفریق را انجام داد .

۵ – عدد جبری – پولی که وارد صندوق یک تجارتخانه میشود یا از آن خارج میگردد هر دو پولند ولی در معنی اختلاف دارند اولی به پول موجود در صندوق اضافه شده و دومی از آن کسر گردیده است ؛ میگویند جهت پول اول با دوم فرق دارد و برای تمیز دادن آنها از یکدیگر اولی را با علامت + (مثبت) و دومی را با علامت — (منفی) نشانه میکنند و این عدد حسابی را که با یکی از دو علامت مذکور ممتاز شده است عدد جبری نامند . عدد جبری ۵ – تلفظ میشود منهای ۵ و ۷ + تلفظ میشود باضافه ۷ .

۶ – عدد های حسابی را قدر مطلق عددهای جبری گویند مثلا در مثال بالا عدد حسابی ۵ قدر مطلق عدد جبری ۵ — میباشد .

۷ – دو عدد جبری مساویند وقتی که دارای یک قدر مطلق و یک نشانه باشند .

۸ – دو عدد جبری قرینه اند وقتی که دارای یک قدر مطلق ولی نشانه های مختلف باشند .

۹ ـ یادآوری ـ بعضی مواقع در عمل نشانه + را از جلوی اعداد جبری بر داشته و آنها را بدون نشانه مینویسند؛ ولی هیچوقت اعداد منفی را بدون نشانه — نمینویسند.

۱۰ ـ عبارت جبری ـ مجموعه‌ای از حروف و اعداد و علاماتی را که در یک رشته محاسبات بکار میروند عبارت جبری می نامند.

۱۱ ـ عبارت جبری منطق (گویا) است وقتی که در آن حرفی زیر رادیکال نباشد و در غیر اینصورت اصم است.

۱۲ ـ عبارت جبری صحیح است وقتی که شامل حرفی در مخرج نباشد و در غیر اینصورت کسری است.

۱۳ ـ دو عبارت جبری را متعادل گویند وقتی مقدار عددی آنها بازاء تمام مقادیری که بجای حروف بگذاریم مساوی باشند.

۱۴ ـ تساوی بین دو عبارت عددی و یا دو عبارت جبری متعادل را اتحاد گویند و بین آنها این علامت ≡ (تلفظ میشود متحد است با) را میگذارند.

۱۵ ـ اگر تساوی بین دو عبارت جبری فقط و فقط بازاء مقادیر مخصوصی از حروف بر قرار شود آن تساوی را معادله گویند.

۱۶ ـ یکجمله ـ اگر عبارتی جبری از حاصل ضرب اعداد جبری با حروف بدست آمده باشد آن را یکجمله یا منم گویند.

۱۷ ـ ضریب ـ عامل عددی هر یکجمله را ضریب آن گویند.

۱۸ یکجمله‌های متشابه اختلافشان فقط در ضرایبشان میباشد.

۱۹ – چند جمله – مجموع چند یکجمله‌ای یك چند جمله یا پولی‌نم را تشکیل میدهند.

II – جمع اعداد جبری

۲۰ – برای جمع دو عدد متحدالعلامه قدر مطلق آنها را جمع نموده علامت مشترك را میگذاریم.

۲۱ – برای جمع دو عدد مختلف‌العلامه قدر مطلق آنها را از هم کم نموده علامت عددیرا که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است میگذاریم.

III – تفریق اعداد جبری

۲۲ – برای کم کردن عدد a از b قرینه a را با b جمع میکنیم.

IV – ضرب اعداد جبری

۲۳ – حاصلضرب دو عدد متحدالعلامه مثبت و حاصلضرب دو عدد مختلف‌العلامه منفی است.

۲٤ – برای ضرب چند عدد جبری قدر مطلق آنها را ضرب نموده اگر تعداد اعداد منفی زوج باشد جلو حاصلضرب + و اگر فرد باشد — میگذاریم.

V – تقسیم اعداد جبری

۲۵ – برای تقسیم دو عدد جبری قدر مطلق آنها را تقسیم نموده اگر هر دو متحدالعلامه باشند جلوی خارج قسمت

ب- و اگر مختلف العلامه باشند — قرار میدهیم.

۷۱_ قوه (توان)

۲۶ - برای تعریف قوه m ام رجوع شود بشماره ۲۹ بخش حساب .

۲۷ - قوه m ام هر عدد مثبت همواره مثبت است .

۲۸ - قوه m ام عدد منفی مثبت است اگر m زوج باشد و منفی است اگر m فرد باشد .

۲۹- ضرب چند قوه - ا - اگر پایه ها مشترک باشند یکی از پایه‌ها را نوشته و نماهارا با هم جمع میکنیم :

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}$$

ب - اگر نماها مساوی باشند پایه‌ها را در هم ضرب نموده نمای مشترک را نما قرار میدهیم :

$$a^m \cdot b^m \cdot c^m = (abc)^m$$

۳۰ - تقسیم دو قوه - ا- اگر پایه ها مساوی باشند یکی از پایه‌ها را نوشته نماها را از هم کم میکنیم :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ب - اگر نماها مساوی باشند پایه ها را تقسیم نموده نمای مشترک را نما قرار میدهیم

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

۳۱ - یادآوری - هر عدد بقوه صفر مساوی است با یك .

۳۲ - قوه کسری - اگر داشته باشیم $\sqrt[q]{a^p}$ آنرا میتوان باینصورت نوشت :

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$

۱ - حاصل ضرب دو قوه کسری یك عدد :

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{pq'+qp'}{qq'}}$$

ب - خارج قسمت دو قوه کسری یك عدد

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q'}}} = a^{\frac{pq'-qp'}{qq'}}$$

ج - قوه کسری حاصل ضرب چند عدد :

$$(abc)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \times b^{\frac{p}{q}} \times c^{\frac{p}{q}}$$

د - بقوه کسری رسانیدن قوی کسری یك عدد :

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{pp'}{qq'}}$$

۳٤ - قوه منفی :

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

۱ - حاصل ضرب دو قوه منفی از یك عدد

$$a^{-m} \times a^{-m'} = a^{-(m+m')} = \frac{1}{a^{m+m'}}$$

ب - خارج قسمت دو قوه منفی از یك عدد :

$$a^{-m} : a^{-m'} = a^{m'-m} = \frac{1}{a^{m-m'}}$$

ج – قوهٔ منفی حاصل ضرب چند عدد

$$(abc)^{-m} = a^{-m} \times b^{-m} \times c^{-m}$$

د – بقوه منفی رسانیدن قوهٔ منفی یك عدد

$$(a^{-m})^{-m'} = a^{mm'}$$

این روابط برحسب تغییر علامت m و 'm متغیر میباشند.

هـ – قوهٔ منفی کسری:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\frac{1}{a^{p}}}$$

VII – جمع جمل جبری

۳٤ – برای جمع چند جمله جبری متشابه یکی ازآنها را نوشته و ضرائب آنهارا جمع جبری مینمائیم.

۳۵ – برای جمع چند کثیرالجمله ، جمل متشابه را باهم جمع نموده و جمل غیرمتشابه را دنبال آنها مینویسیم.

VIII – تفریق جمل جبری

۳٦ – برای تفریق دو کثیرالجمله علامت جمل کاسته را تغییر داده و با کاهشیاب جمع جبری مینمائیم .

IX – ضرب جمل جبری

۳۷ – حاصل ضرب چند یك جمله یك جمله ایست که ضریبش مساوی حاصل ضرب ضرائب آنها بوده شامل تمام حروف آن جمل باشد ، نمای هر یك ازحروف مساوی مجموع نماهائیست که آن حرف در هر یکجمله داشته باشد .

٣٨ – برای ضرب یکجمله در یک کثیر الجمله یک – جملهٔ مزبور را در هر یک از جمل کثیر الجمله ضرب مینمائیم و حاصلضربها را با هم جمع جبری میکنیم .

٣٩ – برای ضرب دو کثیر الجمله هر یک از جمل کثیر – الجملهٔ اول را در کثیر الجمله دوم ضرب نموده و حاصلضربها را با هم جمع جبری میکنیم .

٨ – تقسیم جمل جبری

٤٠ – برای تقسیم دو جمله جبری ضرائب آنها را تقسیم جبری نموده اجزاء نظایر هم را بر هم تقسیم میکنیم . مثال :

٤ ٣ ١٢
٥ ١٥

٤١ – برای تقسیم یک کثیر الجمله بر یکجمله اول کثیر الجمله مقسوم را برحسب قوای نزولی مرتب نموده بعد هر یک از جمل را بر یکجمله مقسوم علیه تقسیم مینمائیم و خارج قسمتها را با هم جمع جبری میکنیم . مثال :

٢٤ ٣ — ٦ — ١٢ + ٣
— ٢

٤٢ – برای تقسیم دو کثیر الجمله آنها را بترتیب قوای نزولی مرتب نموده جملهٔ اول مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمل مقسوم علیه ضرب نموده حاصلضرب را از مقسوم کم میکنیم تا اولین باقیمانده بدست آید بعد اولین جمله مانده را بر جمله اول مقسوم علیه تقسیم کرده خارج قسمت را در تمام جمل مقسوم علیه ضرب مینمائیم و حاصل را از جملهای مانده مقسوم میکنیم تا دومین مانده

بدست آید و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا وقتی که باقیمانده دیگر بر مقسوم علیه قابل قسمت نباشد.

$$
\begin{array}{l|l}
a^3 + 2a^2b + b^3 & a + b \\
\hline
a^3 + a^2b & a^2 + ab - b^2 \\
\quad a^2b & \\
\quad a^2b + ab^2 & \\
\quad\quad - ab^2 + b^3 & \\
\quad\quad - ab^2 - b^3 & \\
\quad\quad\quad 0 \quad + 2b^3 &
\end{array}
$$

۴۳ـ قابلیت تقسیم کثیر الجمله ای x بر $(x + a)$ — کثیر الجمله $P(x)$ بر $(x + a)$ وقتی قابل قسمت است که اگر در $P(x)$ بجای x ، $-a$ قرار دهیم حاصل صفر شود یعنی $P(-a) = 0$

مثال :

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

بر $x + a$ قابل قسمت است زیرا چون در آن بجای x مقدار $(-a)$ را قرار دهیم حاصل $0 = -a^3 + 3a^3 - 3a^3 + a^3$ می‌شود.

همچنین $P(x)$ بر $x - a$ وقتی قابل قسمت است که اگر در آن بجای x مقدار $+a$ بگذاریم حاصل صفر شود.

۸ _ اتحادهای مهم

۴۴ـ تعریف ـ اتحاد عبارت از یک تساوی است که بازای جمیع مقادیری که در دو طرف آن بجای حروف قرار دهیم همواره

صحیح باشد. برای ممتاز ساختن اتحادها از تساویهای معمولی غالباً بین طرفین بجای = علامت ≡ گذاشته میشود.

(١) $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$

(٢) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(٣) $(a-b)(a+b) \equiv a^2 - b^2$

(٤) $(a+b+c+d)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

(٥) $(a+b)^3 \equiv a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

(٦) $(a-b)^3 \equiv a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

$(a^3 + b^3) \equiv (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a^3 - b^3) \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

٤٥ رابطه فیثاغورث :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \equiv ab$$

٤٦ رابطهٔ اولر :

$$a(c-b) + b(a-c) + c(b-a) \equiv 0$$

٢٥ – رابطه استوارت :

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) + (c-b)(a-c)(b-a) \equiv 0$$

٤٧ – بینم (دو جمله) نیوتنی

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \ldots + b^n$$

$$+ \frac{n(n-۱)(n-۲)\ldots\ldots(n-p)}{۱\times۲\times۳\times\ldots\ldots\times p}a^{n-p}a^{p} + \ldots\ldots + a^{n}$$

XII ریشه و ریشگی ها

تعریف - ریشه mام عدد A عددی است مانند a که اگر بقوه mام برسد حاصل مساوی A گردد

$$\sqrt[m]{A} = a \qquad a^{m} = A$$

m را نماینده یا شمار ریشگی گویند.

۴۹ - ریشه اعداد جبری

۱) ریشه زوج هر عدد مثبت دو عدد قرینه است.

$$\sqrt[4]{۶۲۵} = \pm ۵$$

ب) اعداد منفی دارای ریشه زوج نیستند.

ج) علامت ریشه فرد هر عدد با علامت خود آن یکیست.

۵۰ - ریشه دوم ۱- عددیست موهوم و آنرا مساوی i فرض میکنند.

$$\sqrt{-۱} = i$$

۵۱ - اگر نماینده ریشگی و نمای مقدار زیر آنرا در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم کنند در مقدار ریشگی تغییری حاصل نمیشود.

$$\sqrt[m]{a^{p}} = \sqrt[nm]{a^{pn}} = \sqrt[\frac{m}{n}]{a^{\frac{p}{n}}}$$

۵۲ – تحویل چند ریشگی بیك نمایندہ

برای تحویل چند ریشگی بر یشگی هائی که دارای یك نماینده باشند کوچك ترین مضرب مشترك نماینده های ریشگی ها را نماینده مشترك قرار داده و آنرا بر نماینده هر ریشگی تقسیم و حاصل را در نمای مقدار زیر ریشگی ضرب مینمائیم.

مثال – میخواهیم نماینده ریشگی های $\sqrt[6]{a}$ $\sqrt[8]{b^3}$ $\sqrt[9]{n^4}$ را یکی نمائیم، کمم ۶ و ۸ و ۹ عدد ۷۲ است پس:

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[72]{a^{12}} \qquad \sqrt[8]{b^3} = \sqrt[72]{b^{27}} \qquad \sqrt[9]{n^4} = \sqrt[72]{n^{32}}$$

۵۳ – ضرب ریشگی ها

ا – برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك m باشند مقدار زیر ریشگی ها را ضرب نموده و از حاصل ضرب ریشه m ام میگیریم:

$$\sqrt[m]{a^p}\ \sqrt[m]{b^q}\ \sqrt[m]{c^r} = \sqrt[m]{a^p b^q c^r}$$

ب – برای ضرب چند ریشگی که دارای نماینده مشترك نباشند نخست نماینده ریشگی ها را یکی میکنیم سپس مانند حالت قبل ضرب مینمائیم.

۵٤ – تقسیم ریشگی ها

ا – برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترك m باشند مقادیر زیر ریشگی ها را تقسیم نموده و از خارج قسمت ریشه m ام میگیریم

$$\frac{\sqrt[m]{a^p}}{\sqrt[m]{b^q}} = \sqrt[m]{\frac{a^p}{b^q}}$$

ب ـ برای تقسیم دو ریشگی که دارای نماینده مشترک نباشند نخست نماینده آنها را مساوی نموده بعد آنها را تقسیم مینمائیم.

۵۵ ـ برای اینکه عددی را داخل یک ریشگی نمائیم آنرا بقوه نماینده ریشگی رسانده در مقدار زیر ریشگی ضرب می کنیم:

$$a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{mn} \cdot b}$$

۵۶ ـ برای اینکه عددی را از زیر ریشگی خارج کنیم نمای آنرا بر نماینده ریشگی تقسیم میکنیم و خارج قسمت را نمای آن عدد در خارج ریشگی و باقیمانده تقسیم را نمای آن عدد در زیر ریشگی قرار میدهیم:

$$\sqrt[4]{a^4 b^{11} c^{14}} = bc^3 \sqrt[4]{a^4 b^3}$$

۵۷ ـ برای اینکه ریشگی را بقوه‌ای برسانیم کافیست مقدار زیر ریشگی را بآن قوه برسانیم:

$$(\sqrt[m]{a})^p = \sqrt[m]{a^p}$$

۵۸ ـ برای آنکه از ریشه m ام عددی ریشه n ام بگیریم کافی است که از آن ریشه mn ام بگیریم

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

۵۹ ـ تعریف ـ حرفی را که زیر ریشگی باشد و نتوان آنرا خارج نمود گنگ گویند و اگر از زیر ریشگی خارج شود گویا نامند.

۶۰ - گویا نمودن کسری که مخرجش گنگ باشد.

۱ - مخرج کسر یک جمله است - برای گویا کردن آن صورت و مخرج کسر را در عبارتی ضرب میکنیم که مخرج گویا شود، مثلا اگر مخرج $\sqrt[m]{b^p}$ باشد صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{b^{m-p}}$ ضرب میکنیم.

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^p}} = \frac{a \times \sqrt[m]{b^{m-p}}}{\sqrt[m]{b^p} \times \sqrt[m]{b^{m-p}}} = \frac{a \times \sqrt[m]{b^{m-p}}}{b}$$

تعریف - مزدوج دو جمله‌ای $a + b$ دو جمله‌ای $a - b$ است.

ب - مخرج کسر دو جمله است - برای گویا کردن کسر صورت و مخرج آنرا در مزدوج مخرج ضرب میکنیم

$$\frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{b - c}$$

XIII - معادلات

۶۱ - تعریف - معادله عبارت از یک تساوی است که

فقط دو طرف آن بازاء یك یا چند مقدار معین که بجای مجهول آن قرار میدهیم با یکدیگر مساوی شوند.

۶۲ – توجه کنید! فرق معادله با اتحاد این است که معادله بازاء یك یا چند مقدار معین صحیح است و اتحاد بازاء جمیع مقادیر.

۶۳ – خواص معادلات

۱ – اگر بر طرفین معادله یك عدد جبری اضافه کنیم در معادله تفاوتی حاصل نمیشود.

۲ – اگر طرفین معادله را بر یك عدد تقسیم یا در یك عدد ضرب بنمائیم در معادله تغییری حاصل نمیشود.

۳ – اگر عددی را از یك طرف معادله بطرف دیگر ببریم باید علامت آنرا تغییر دهیم.

۶۴ – حل و بحث معادلات درجهٔ اول

معادله درجه اول یك مجهولی پس از اختصار بصورت کلی $ax = b$ نوشته میشود.

اگر $a \neq 0$ باشد معادله دارای یك ریشه $x = \frac{b}{a}$ خواهد بود.

اگر $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد معادله غیر ممکن است.

اگر $a = 0$ و $b = 0$ باشد معادله مبهم است.

اگر $a \neq 0$ و $b = 0$ باشد ریشه معادله صفر است.

برای اینکه دو معادله درجه اول $ax = b$ و $a'x = b'$ دارای یك ریشه باشند باید $ab' - ba' = 0$ باشد.

٦٥ – دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول

دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول پس از اختصار باین صورت نوشته میشود:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

برای حل دستگاههای دو معادله دو مجهولی درجه اول چهار طریقه معمول است :

ا – طریقهٔ تحویل – از معادله اول بفرض معلوم بودن یکی از مجهولها مجهول دیگر را بدست آورده در معادله دوم قرار میدهیم، در نتیجه یك معادله یك مجهولی درجه اول پیدا میشود که با حل آن یکی از مجهولها بدست میآید. با معلوم شدن یك مجهول پیدا کردن دیگری بوسیلهٔ یکی از آن دو معادله خیلی آسان است .

ب – طریقهٔ حذف – در این طریقه ضرایب یکی از مجهولها را در دو معادله بدو عدد قرینه تبدیل مینمائیم و از جمع کردن دو معادله یك معادله یك مجهولی بدست میآید که با حل آن یك مجهول پیدا میشود . با معلوم شدن یك مجهول پیدا کردن دیگری ساده است .

ج – طریقهٔ قیاسی – یکی از مجهولات را بفرض معلوم بودن مجهول دیگر در هر یك از دو معادله پیدا نموده دو مقداری را که برای آن بدست میآید مساوی قرار میدهند. پس از حل این تساوی یکی از مجهولات بدست میآید و با معلوم بودن یك مجهول میتوان مجهول دیگر را از یکی از دو معادله پیدا نمود .

د – بوسیله فرمولهای کرامر – ریشه‌های دو معادله دو مجهولی درجه اول عبارتند از :

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

اگر $ab' - ba' \neq 0$ باشد معادله دارای جواب است .

٦٦ – معادله درجه دوم

ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ عبارتند از

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یا اگر $b = 2b'$ فرض شود

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

ا – اگر Δ (مبین) منفی باشد معادله دارای ریشه نیست.

ب – اگر Δ (مبین) مساوی صفر باشد معادله دارای ریشه مضاعف $x = \frac{-b}{2a}$ یا $x = \frac{-b'}{a}$ است.

شرط لازم و کافی برای اینکه یك معادله درجه دوم دارای ریشه باشد آنستکه مبین آن مثبت باشد .

٦٧ – روابط بین ضرائب و ریشه‌های معادله درجه دوم

ا – حاصل جمع ریشه‌ها $x' + x'' = \frac{-b}{a}$

ب – حاصل ضرب ریشه‌ها $x' x'' = \frac{c}{a}$

ج - تفاضل ریشه‌ها $x' - x'' = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$

۶۸ - حاصل جمع قوای متشابه ریشه‌های یک معادله درجه دوم.

اگر مجموع قوای pام ریشه های معادلهٔ درجه دومی را Sp فرض کنیم یعنی $S_p = x'^p + x''^p$ باشد روابط ذیل را خواهیم داشت:

$$S_1 = x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

$$S_2 = x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$S_3 = x'^3 + x''^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0$$

$$aS(p+2) + bS(p+1) + cS_p = 0$$

۶۹ - اگر S مجموع و P حاصل ضرب دو عدد باشد آن دو عدد ریشه‌های این معادله‌اند: $x^2 - Sx + P = 0$

۷۰ - اگر d تفاضل و p حاصل ضرب دو عدد باشد آن دو عدد ریشه‌های این معادله میباشند: $x^2 - dx - P = 0$

۷۱ - علامت ریشه‌های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۱ - اگر $\frac{c}{a} < 0$ و یا $ac < 0$ باشد x' و x'' مختلف العلامه هستند.

ب ـ اگر $0 < \frac{c}{a}$ (یا $0 < ac$) باشد دو ریشه متحد العلامه هستند

ج ـ اگر $0 < ac$ یا ($0 < \frac{c}{a}$) و $0 < ab$ و $0 \le \Delta$ باشد هردو ریشه منفی هستند.

د ـ اگر $0 < ac$ (یا $0 < \frac{c}{a}$) و $0 > ba$ و $0 \le \Delta$ باشد هر دو ریشه مثبت میباشند.

برای آسان شدن بحث فرض میکنیم ریشه ای که بر حسب قدر مطلق بزرگتر است x' و ریشه دیگر x'' باشد. جدول ذیل علائم ریشه‌ها را مشخص میسازد:

Δ	$\frac{c}{a}$	$-\frac{b}{a}$	علامت ریشه‌ها
+	+	+	$x' > 0$ ______ $x'' > 0$
+	+	−	$x' < 0$ ______ $x'' < 0$
+	0	+	$x' > 0$ ______ $x'' = 0$
+	0	−	$x' < 0$ ______ $x'' = 0$
+	−	+	$x' > 0$ ______ $x'' < 0$
+	−	−	$x' < 0$ ______ $x'' > 0$
+	−	0	$x' > 0$ ______ $x'' < 0$ $\lvert x' \rvert = \lvert x'' \rvert$
0	قطعاً مثبت است	+	$x' = x'' > 0$
0		−	$x' = x'' < 0$
−			ریشه‌ها موهومند

XIV_ سه جمله درجه دوم

۷۲ – سه جملهٔ $y = ax^2 + bx + c$

باین صورت نوشته میشود :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

حالت اول – اگر $\triangle$ یعنی $b^2 - 4ac > 0$ باشد y دارای دو ریشه x' و x'' خواهد بود و سه جمله بصورت

$$y = a(x - x')(x - x'')$$

درمیاید. در اینصورت اگر به x مقادیر خارج دو ریشه داده شود علامت سه جمله با علامت a یکی است و اگر مقداری بین x' و x'' بدهیم علامت سه جمله مخالف علامت a است.

حالت دوم – $b^2 - 4ac = 0$

در اینصورت

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

و علامت سه جمله همیشه با علامت a یکی است.

حالت سوم – $b^2 - 4ac < 0$

در اینصورت $y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + m^2\right]$ است

و باز هم علامت سه جمله همیشه با علامت a یکی است .

خلاصه – علامت سه جمله درجه دوم بازاء مقادیری که بین ریشه‌ها باشند (در صورت وجود دو ریشه) مخالف علامت a و بازاء سایر مقادیر همواره موافق علامت a است.

۷۳ – مقایسه عدد با ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم.
ax^2+bx+c

شرط لازم و کافی برای اینکه عدد α بین ریشه‌ها قرار داشته باشد آنست که $af(\alpha)<0$ باشد.

ب – شرط لازم و کافی برای اینکه عدد α کوچکتر از دو ریشه باشد:

$$\Delta>0 \qquad af(\alpha)>0 \quad \text{و} \quad \alpha<-\frac{b}{2a} \ \text{یا}\ \alpha+\frac{b}{2a}<0$$

ج – شرط لازم و کافی برای اینکه α بزرگتر از دو ریشه باشد:

$$\Delta>0 \qquad af(\alpha)>0 \qquad \alpha>-\frac{b}{2a} \ \text{یا}\ \alpha+\frac{b}{2a}>0$$

۷۴ – مقایسه دو عدد α و β با ریشه‌های سه‌جمله‌ای ax^2+bx+c

(برای آسان شدن نخست α را از β و x'' را از x' کوچکتر فرض میکنیم). هرگاه:

$\alpha<x''<\beta<x'$	$af(\alpha)>0$	و	$f(\alpha)f(\beta)<0$
$x''<\alpha<x'<\beta$	$af(\beta)>0$	و	«
$\alpha<\beta<x''<x'$	$\alpha<\beta<-\frac{b}{2a}$	$\Delta>0$	$f(\alpha)f(\beta)>0$
$x''<x'<\alpha<\beta$	$-\frac{b}{2a}<\alpha<\beta$	«	«
$x''<\alpha<\beta<x'$	$af(\alpha)<0$		$f(\alpha)f(\beta)>0$

۷۵ – مقایسه ریشه‌های دو سه‌جمله‌ای

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های سه‌جمله $f(x) = ax^2 + bx + c$

و x'_1 و x'_2 ریشه‌های سه‌جمله $f_1(x) = a'x^2 + b'x + c'$ باشند:

شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه جمله دارای یک ریشه مشترک باشند:

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0$$

اگر $R = 0$ و $ab' - ba' \neq 0$ باشد ریشه مشترک عبارتست از

$$x = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

اگر $R \neq 0$ باشد دو سه جمله دارای ریشه مشترک نیستند.

ب - شرط لازم و کافی برای اینکه دو سه جمله دارای دو ریشه مشترک باشند آنستکه

$\Delta > 0$ و $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد

ج - شرط لازم و کافی برای اینکه یک ریشهٔ یکی از سه جمله‌ها مابین ریشه‌های سه جمله دیگر واقع باشد آنستکه $R < 0$ باشد بعلاوه:

اگر $R < 0$ و $-\frac{b}{2a} < -\frac{b'}{2a'}$ ، $x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2$

اگر $R < 0$ و $-\frac{b}{2a} > -\frac{b'}{2a'}$ ، $x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2$

۱۵ معادلات قابل تبدیل بمعادله درجه دوم

۷۶ – معادله دو مجذوری $ax^4 + bx^2 + c = 0$

۱ – شرط کافی برای اینکه این معادله دارای دو ریشه باشد آنستکه $\frac{c}{a}<0$ یا $ac<0$ باشد و دو ریشه آن عبارتند از :

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

۲ – شرط لازم و کافی برای آنکه معادله فوق دارای چهار ریشه مشخص باشد آنستکه :

$$\Delta=b^2-4ac>0 \qquad -\frac{b}{a}>0 \qquad \frac{c}{a}>0$$

۳ – شرط لازم و کافی برای آنکه معادله دو مجذوری دارای ریشه مضاعف باشد این است که $-\frac{b}{a}>0$ و $b^2-4ac=0$ باشد و ریشه آن عبارتست از

$$x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

۴ – اگر $c=0$ باشد دو تا از ریشه‌های معادله فوق صفر میباشند و دو ریشه دیگر $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ خواهند بود اگر $-\frac{b}{a}>0$ باشد.

۷۷ معادلات معکوسه

تعریف – معادله را معکوسه گویند در صورتیکه ریشه‌های آن عکس یکدیگر باشند مثلا اگر a یکی از

ریشه‌های معادله معکوسه درجه دوم باشد ریشه دیگر آن $\frac{1}{a}$ خواهد بود.

در معادلات معکوسه ضرایب جمله هائیکه از وسط معادله بیك فاصله باشند مساوی هستند.

۷۸ – حل معادلات معکوسه –

معادله معکوسه‌ای که بزرگترین درجه مجهول آن فرد باشد بر $x \pm 1$ قابل‌قسمت‌است بنابراین ∓ 1 یکی‌از ریشه‌های آن‌است و برای پیدا کردن سایر ریشه ها معادله را بر $x \pm 1$ تقسیم نموده ریشه خارج قسمت را مطابق‌قواعد پیش پیدا میکنیم.

ب – معادلات معکوسه‌ایکه‌درجه آنها‌زوج باشد– برای نمونه معادله درجه چهارم معکوسه زیر را حل میکنیم :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

طرفین معادله را بر x^2 تقسیم میکنیم

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

از ضرایب مساوی فاکتور میگیریم :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{2}{x}\right) + c = 0$$

فرض میکنیم $x + \frac{1}{x} = y$ آنوقت $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

و معادله بصورت زیر در میآید.

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

برای حل و بحث بشماره ۶۶ مراجعه شود.

۷۹ – معادلات معکوسه درجه سوم

۱ – معادله نوع اول معکوسه درجه سوم

$$ax^3+bx^2+bx+a=0$$

دارای یک ریشه $x=-1$ است و ریشه های دیگرش ریشه های معادله درجه دوم $ax^2+(b-a)x+a=0$ میباشد

۲ – معادله نوع دوم

$$ax^3+bx^2-bx-a=0$$

دارای یک ریشه $x=1$ است و ریشه‌های دیگر آن ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+(a+b)x+a=0$ میباشد

۸۰ – معادله معکوسه درجه چهارم

۱ – نوع اول $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

اگر y' و y'' ریشه‌های معادله درجه دوم $ay^2+by+c-2a=0$ باشد (۷۸) ریشه معادله معکوسه عبارتند از ریشه های معادله

$$x^2-y'x+1=0 \quad \text{و} \quad x^2-y''x+1=0$$

۲ – نوع دوم

$$ax^4+bx^3-bx-a=0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از: $x=\pm1$ و ریشه‌های معادله

$$ax^2+bx+a=0$$

۸۱ – معادله معکوسه درجه پنجم

۱ – نوع اول

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$$

دارای یک ریشه $x=-1$ است و ریشه‌های دیگر آن ریشه‌های معادله معکوسه درجه چهارم ذیل است:

$$ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b+a)x^2 + (b-a)x + a = 0$$

ب – نوع دوم

$$ax^5 + bx^4 - cx^2 - bx - a = 0$$

که دارای یک ریشه $x = 1$ میباشد و ریشه های دیگر آن ریشه‌های معادله‌درجه چهارم

$$ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (a+b)x + a = 0$$

۸۲ معادلات اصم – برای حل معادلات اصم طرفین معادله‌را آنقدر بقوه میرسانیم تامعادله منطقی بدست آید بعد معادله حاصل را بر طبق قواعد فوق حل‌میکنیم.

مثال

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{x+15}$$

طرفین را بقوه ۲ میرسانیم :

$$x - 1 + x - 6 + 2\sqrt{x^2 - 7x + 6} = x + 15$$

و یا

$$2\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 22 - x$$

باز طرفین را بقوه ۲ میرسانیم

$$4(x^2 - 7x + 6) = 484 - 44x + x^2$$

$$3x^2 + 16x - 460 = 0$$

$$x = 10 \qquad x = -\frac{46}{3}$$

۸۳ – تبصره – چون طرفین معادله را بقوه برسانیم ممکن است ریشه‌های اضافی پیدا شود. درمثال فوق $-\frac{46}{3}$ ریشه اضافی وغیر قابل قبول است.

XVI نامساوی

٨٤ – تعریف – اگر دو عبارت باهم مساوی نباشند یکی از دیگری کوچکتر است یا بزرگتر؛ اگر کوچکتر باشد باین علامت $<$ و اگر بزرگتر است باین علامت $>$ نمایش میدهند و آنرا نامساوی میگویند.

٨٥ – خواص نامساوی

ا – اگر در طرفین نامساوی دو عدد مساوی اضافه یا کم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمی‌شود.

ب – اگر طرفین نامساوی را درعدد مثبتی ضرب یا بر یك عدد مثبت تقسیم کنیم در نامساوی تغییری حاصل نمیشود

ج – اگر طرفین نامساوی را دریك عدد منفی ضرب یا بر یك عدد منفی تقسیم نمائیم جهت آن تغییر میکند.

د – اگر طرفین نامساوی را بقوه فرد برسانیم درآن تغییری پیدا نمی‌شود.

هـ – اگر طرفین یك نامساوی را که هردومثبت باشند بقوه زوج برسانیم درنامساوی تغییری پیدا نمیشود.

و – اگر طرفین یك نامساوی را که هردومنفی باشند بقوه زوج برسانیم جهت نامساوی تغییر میکند.

٨٦ – نامساوی درجه اول یك مجهولی پس از اختصار بصورت $ax+b>0$ نوشته میشود.

اگر $a>0$ باشد جوابهای نامساوی عبارتند از $x>-\frac{b}{a}$

اگر $a<0$ » » » » » » $x<-\frac{b}{a}$

۷۸ – نامساوی درجه دوم $ax^2 + bx + c > 0$

اولاً، اگر $\Delta < 0$ باشد،

۱ – درصورتیکه $a > 0$ باشد نامساوی بازاء جمیع مقادیر x محقق است

ب – درصورتیکه $a < 0$ باشد نامساوی غیر ممکن است.

ثانیاً، اگر $\Delta = 0$ باشد:

۱ – در صورتیکه $a > 0$ باشد نامساوی بازاء جمیع مقادیر x محقق است مگر بازاء $x = -\frac{b}{2a}$ که صفر میشود

ب – درصورتیکه $a < 0$ باشد نامساوی غیر ممکن است:

ثالثاً، اگر $\Delta > 0$ باشد

۱ – درصورتیکه $a > 0$ و x' و x'' باشند بازاء مقادیری کوچکتر از x' یا بزرگتر از x'' نامساوی محقق است

ب – درصورتیکه $a < 0$ باشد نامساوی بازاء مقادیر مابین x' و x'' محقق است

$$x' < x < x''$$

۸۸ – نامساویهای درجه m ام

برای حل نامساویهای درجه m ام آنها را بحاصلضرب عوامل تجزیه نموده بعداً علامت هریك از عوامل را پیدا کرده درجدولی ثبت میکنیم و از روی جدول نتیجه مطلوب را پیدا مینمائیم

مثال – نامساوی ذیل را حل نمائید

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12 > 0$$

آنرا بحاصلضرب عوامل تجزیه میکنیم:

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-4) > 0$$

x	$-\infty$	۱		۳		۴	$+\infty$
$x - 1$	—	۰	+		+		+
$x - 3$	—		—	۰	+		+
$x - 4$	—		—		—	۰	+
$f(x)$	—		+		—		+

ریشه های نامساوی عبارتند از $x < 1$ و $3 < x < 4$

۸۹ ـ نامساوی کسری

برای حل نامساویهای کسری صورت و مخرج را در مخرج ضرب میکنیم و علامت صورت کسر حاصل را پیدا مینمائیم .

XVII تصاعد حسابی

۹۰ ـ تعریف ـ تصاعد حسابی رشته اعدادی است که تفاضل هر دو جمله پیاپی آن مقدار ثابتی باشد و آن مقدار ثابت را قدر نسبت تصاعد مینامند .

۹۱ ـ اگر در تصاعدی، هر جمله از جمله قبل از آن بزرگتر باشد تصاعد صعودی والا نزولی است. در حالت اول قدر نسبت عددی است مثبت و در حالت دوم عددی منفی است .

۹۲ ـ اگر در تصاعد حسابی a جمله اول و l جملهٔ n ام و r قدر نسبت باشد :

۱ ـ مقدار جمله n ام : $l = a + (n - 1) r$

ب ـ حاصل جمع n جمله اول : $S = \frac{n(a+l)}{2}$

ج ـ اگر p واسطه حسابی بین دو جمله متوالی یک تصاعد حسابی درج کنیم r قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$r' = \frac{r}{p+1}$$

۹۳ ـ در تصاعد حسابی محدود که عده جمل زوج باشد مجموع هر دو جمله متساوی البعد از طرفین مقداریست ثابت و مساویست با مجموع دو جمله اول و آخر و اگر عده جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با واسطه عددی هر دو جمله متساوی البعد از طرفین .

۹۴ ـ دستورهای مختلف :

۱ ـ حاصل جمع n عدد متوالی از سلسلهٔ اعداد طبیعی که از واحد شروع شود عبارتست از :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ب ـ حاصل جمع n عدد زوج متوالی در سلسله طبیعی اعداد عبارتست از : $S = n(n+1)$

ج ـ مقدار عدد n ام اعداد فرد از سلسله طبیعی اعداد عبارتست از : $l = 2n - 1$

د ـ حاصل جمع n عدد از اعداد فرد سلسله طبیعی اعداد عبارتست از : $S = n^2$

ه ـ حاصل جمع مربعات n عدد متوالی از سلسله طبیعی

اعداد که ازواحد شروع شود عبارتست از :

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و ـ حاصل جمع مکعبات n عدد متوالی از سلسله اعداد طبیعی که ازواحد شروع شود عبارتست از :

$$S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

XVIII تصاعد هندسی

۹۵ـ تعریف ـ تصاعد هندسی رشته اعدادیست که خارج قسمت هر دو جمله پیاپی آن مقدار ثابتی باشد این مقدار ثابت را قدر نسبت تصاعد هندسی گویند .

۹۶ـ هرگاه هر جمله از تصاعد از جمله قبل از آن بزرگتر باشد تصاعد صعودی و الا نزولی است. در حالت اول قدر نسبت بزرگتر از واحد و در حالت دوم کوچکتر ازواحد است .

۹۷ـ اگر در تصاعدی هندسی a جمله اول ، l جمله n ام و q قدر نسبت باشد :

ا ـ مقدار جمله n ام : $l=aq^{n-1}$

ب ـ S حاصل جمع جملهٔ n اول تصاعد :

$$S=\frac{lq-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

ج ـ P حاصل ضرب n جمله اول تصاعد :

$$P=\sqrt{(al)^n}$$

د — اگر n واسطهٔ هندسی بین دو جملهٔ متوالی یك تصاعد هندسی درج کنیم q' قدر نسبت تصاعد درج شده عبارتست از :

$$q' = \sqrt[n+1]{q}$$

هـ — حد مجموع جمل یك تصاعد هندسی نزولی وقتیکه عده جمل بینهایت زیاد شود :

$$\lim S_n \quad (n \to \infty) = \frac{a}{1-q}$$

۹۸ — در تصاعد هندسی محدود که عده جمل زوج باشد حاصل ضرب هر دو جمله متساوی البعد از طرفین مقدار ثابت و مساویست با حاصل ضرب دو جمله اول و آخر و اگر عده جمل فرد باشد مقدار جمله وسط مساوی است با جذر حاصل ضرب (واسطه هندسی) هر دو جمله متساوی البعد از طرفین

XIX — لگاریتم

۹۹ — تعریف — دو تصاعد نامحدود، یکی هندسی که جمله اولش یك و قدر نسبت آن q و دومی حسابی که جمله اولش صفر و قدر نسبت آن r باشد، فرض نموده و آنها را جمله بجمله بطوری زیر هم مینویسیم که صفر تصاعد حسابی زیر یك از تصاعد هندسی قرار گیرد، باین طریق :

$$\left.\begin{matrix} \therefore \; \ldots \; q^{-m} \; \ldots \; q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^{2} \; \ldots \; q^{m} \; \ldots \\ \div \; \ldots \; -mr \; \ldots \; -2r . -r . 0 . r . 2r \; \ldots \; mr \; \ldots \end{matrix}\right\}$$

دو رشته تصاعدی که بطریق بالا نوشته شده باشند

دستگاه لگاریتم را تشکیل میدهند ودر آن هرجمله ازتصاعد عددی لگاریتم (log) جمله نظیرش ازتصاعد هندسی و هر جمله ازتصاعد هندسی عدد مابازاء یا آنتی لگاریتم جمله نظیرش ازتصاعدعددی است؛ مثلا :

$\log q^4 = 2r$

و $2r$ عدد مابازاء $= q^4$

۱.۰۰ ـ باتوجه باینکه $q^0 = 1$ ؛ چون جمله های تصاعد هندسی همیشه مثبت اند پس فقط اعداد مثبت دارای لگاریتم هستند و اعداد کوچکتر ازواحد دارای لگاریتم منفی میباشند همچنین $\log \infty = \infty$ و $\log 0 = -\infty$ وهمیشه $\log 1 = 0$

۱.۰۱ ـ درهر دستگاه لگاریتم عددی را که لگاریتم آن یک است مبنای آندستگاه مینامند .

۱.۰۲ ـ لگاریتم عدد N، در دستگاهی بمبنای a، عدد بدست مانند x است؛ چون مبنای a را بقوة آن برسانیم حاصل مساوی N گردد یعنی :

$\log_a N = x$

اگر $N = a^x$

۱.۰۳ ـ اگر N و a مثبت باشند همیشه برای x مقداری که غالبا اصم خواهد بود بدست میآید

۱.۰۴ ـ هرگاه $a = N$ فرض شود $x = 1$ میشود یعنی لگاریتم مبنا همیشه مساوی یک است (نمره ۱.۰۱)

خواص لگاریتم

۱.۰۵ ـ لگاریتم حاصل ضرب چند عدد مثبت مساوی است

با مجموع لگاریتم‌های آن اعداد :

$$\log abc = \log a + \log b + \log c$$

۱۰۶ – لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت مساوی است با تفاضل لگاریتم صورت و مخرج :

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

۱۰۷ – لگاریتم عکس هر عدد مساویست با لگاریتم آن عدد با علامت مخالف و آنرا کالگاریتم (Cologarithme) آن عدد نامند یعنی :

$$\log \frac{1}{b} = -\log b = \operatorname{colog} b$$

پس $\log \frac{a}{b} = \log a + \operatorname{colog} b$

۱۰۸ – لگاریتم قوه mام هر عدد مساویست با m برابر لگاریتم آن :

$$\log a^m = m \log a$$

۱۰۹ – لگاریتم ریشه mام هر عدد مساویست با $\frac{1}{m}$ لگاریتم آن عدد

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a$$

لگاریتم اعشاری یا لگاریتم (Vulgaires) :

۱۱۰ – در دستگاه لگاریتم اعشاری مبنا ده و قدر نسبت تصاعد عددی یك و قدر نسبت تصاعد هندسی ده میباشد یا بطرزی :

. . . : ۱۰۳ : ۱۰ : ۱ : 10^{-1} : 10^{-2} : . . .

. . . : ۲ . ۱ . ۰ . −۱ . −۲ . . .

۱۱۱ — لگاریتم اعدادی که محصور بین قوای متوالیه ۱۰ باشند دارای یک جزء صحیح بنام مفسر و یک جزء اعشاری بنام مانتیس میباشد

۱۱۲ — اگر عددی را در یکی از قوای ۱۰ ضرب و یا بر آن تقسیم نمائیم در جزء اعشاری لگاریتم آن تغییری حاصل نمیشود ولی عددی مساوی نماینده آن قوه به مفسر اضافه یا از آن کم میشود :

$$\log(A \cdot 10^m) = \log A + \log 10^m = \log A + m$$

$$\log\left(\frac{A}{10^m}\right) = \log A - \log 10^m = \log A - m$$

۱۱۳ — مفسر لگاریتم هر عدد بزرگتر از واحد عددی است مساوی عده ارقام صحیح همان عدد منهای یک .

۱۱۴ — چون لگاریتم اعداد کوچکتر از واحد منفی است معمولا آنرا بطریق زیر تبدیل به مانتیس مثبت و مفسر منفی مینمایند :

فرض میکنیم $\log A = -2,75241$ باشد آنرا بترتیب چنین مینویسیم :

$$\log A = -2 - 0,75241 = -2 - 1 + 1 - 0,75241$$
$$= (-2 - 1) + (1 - 0,75241)$$
$$= -3 + 0,24759$$

و در موقع نوشتن برای اینکه نمایش دهند فقط مفسر منفی است علامت − را بالای مفسر میگذارند یا بطریق :

$$\log A = \bar{3},24759$$

تبصره — کلگاریتم اعداد را نیز بطریق بالا تبدیل

بمفسر منفی و مانتیس مثبت مینمایند.

مفسر منفی اعداد کوچکتر از واحد برابر است با تعداد صفرهائی که درطرف چپ اولین رقم با معنای آن عدد قرار دارد.

۱۱۵ — اگر لگاریتمهای اعداد در دستگاهی بمبنای b دردست باشند و بخواهیم لگاریتمهای آنها را در دستگاهی بمبنای a بدست آوریم باید لگاریتمهای آنها را که بمبنای b است در مقدار ثابت $\frac{1}{\log_a b}$ (عکس لگاریتم b دردستگاه بمبنای a) ضرب کنیم (مقدار ثابت $\frac{1}{\log_a b}$ را مدول module گویند)

چهار عمل اصلی در لگاریتم

۱۱۶ — درجمع لگاریتمها مانتیسها را باهم جمع نموده ومفسرها را جمع جبری مینمائیم.

۱۱۷ — درتفریق لگاریتمها بجای مفروق کلگاریتم عدد را مینویسیم وعمل تفریق بجمع مبدل میشود.

۱۱۸ — درضرب عددصحیح در لگاریتم عدد بزرگتر از یك مانند ضرب اعداد اعشاری عمل مینمائیم.

۱۱۹ — برای ضرب عدددرست در لگاریتم عدد کوچکتر از یك چون لگاریتم عدد کوچکتر از یك مرکب از مفسر منفی مانتیس مثبت است عدددرست رادرمانتیس ضرب نموده و بین جزء صحیح حاصل با حاصل ضرب آن عدد در مفسرمنفی جمع جبری بجا میآوریم.

۱۲۰ — درتقسیم لگاریتم عددبزرگتر از یك درعددصحیح مانند تقسیم اعداد اعشاری برعدد صحیح عمل مینمائیم.

۱۲۱ — درتقسیم لگاریتم عدد کوچکتر از یك برعددصحیح

دو حالت اتفاق میافتد .

۱ ــ مفسر منفی بتنهائی برمقسوم علیه قابل قسمت است ،
دراینصورت مفسر و مانتیس را جدا جدا بــر مقسوم علیه تقسیم
نموده خارج قسمت را بصورت لگاریتم عدد کوچکتر از یك
مینویسیم .

مثال: ۸ ۷۷۲۴۲۴ : ۴ = ۳/۷۲۴۲۴ ـــ ۴
= ۲ + ۰٫۱۸۱۰۶ = ۲/۱۸۱۰۶
= ۳٫۱۸۱۰۶

۲ ــ مفسر منفی به تنهائی برمقسوم علیه قابل قسمت نیست ،
در اینحال آنقدر واحد منفی بمفسر منفی می افزائیم تا قابل
قسمت شود و بهمین اندازه هم واحد مثبت بمانتیس مثبت اضافه
میکنیم تا در لگاریتم تغییری حاصل نگردد بعد مانند حالت قبل
عمل مینمائیم :

مثال: ۳/۷۲۲۶۳۵ : ۵ = (۳ + ۰٫۷۴۳۶۳۵)/۵
= (۳ ـ ۲ + ۲ + ۰٫۷۴۳۶۳۵)/۵
= (۵ + ۲٫۷۴۳۶۳۵)/۵ = ۵/۵ + ۲٫۷۴۳۶۳۵/۵
= ۱ + ۰٫۵۴۵۲۷ = ۱/۵۴۵۲۷

۲۲ ۱ ــ در تقسیم لگاریتم بر لگاریتم نیز دو حالت اتفاق میافتد :
۱ ــ اگر مقسوم و مقسوم علیه هر دو لگاریتم مثبتند مانند
تقسیم دو عدد اعشاری عمل مینمائیم .
۲ ــ اگر مقسوم و مقسوم علیه یا یکی از آنها منفی است
بجای آن کلگاریتم میگذاریم و مانند حالت قبل عمل مینمائیم .

جدولهای لگاریتم

۱۲۳ ـ جدولهای لگاریتم جدولهائی است که بکمک آنها میتوان لگاریتمهای اعداد را بدست آورد ، یا عددهائی را که لگاریتمهایشان در دست است پیدا نمود . چون تعیین مفسر لگاریتم آسان است در جداول فقط مانتیس لگاریتم اعداد را ثبت کرده اند .

۱۲۴ ـ جدولهای لگاریتم بر دو قسم اند :

۱ ـ جدولهای بزرگ که در آنها لگاریتم اعداد تا هفت رقم اعشار داده شده است .

۲ ـ جدولهای کوچك که در آنها لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰ با پنج رقم اعشار نوشته شده است .

در محاسبات عادی میتوان از جدولهای کوچك استفاده نمود و نتیجه محاسبه را با تقریب کافی بدست آورد از جدولهای کوچك که بیشتر مورد استفاده دانش آموزان است . جدول دو بو تی است که ترجمه فارسی آن نیز از طرف وزارت فرهنگ چاپ شده . طرز استفاده از جداول در هر یك از آنها نوشته شده است .

۱۲۵ ـ ما در جدول صفحهٔ ۷۷ مانتیس لگاریتم عددهای از ۱ تا ۱۰۰۰ را درج میکنیم .

عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم	عدد	لگاریتم
٠١	٠٠٠٠٠	٢١	٣٢٢٢٢	٤١	٦١٢٧٨	٦١	٧٨٥٣٣	٨١	٩٠٨٤٩
٢	٣٠١٠٣	٢	٣٤٢٤٢	٢	٦٢٣٢٥	٢	٧٩٢٣٩	٢	٩١٣٨١
٣	٤٧٧١٢	٣	٣٦١٧٣	٣	٦٣٣٤٧	٣	٧٩٩٣٤	٣	٩١٩٠٨
٤	٦٠٢٠٦	٤	٣٨٠٢١	٤	٦٤٣٤٥	٤	٨٠٦١٨	٤	٩٢٤٢٨
٥	٦٩٨٩٧	٥	٣٩٧٩٤	٥	٦٥٣٢١	٥	٨١٢٩١	٥	٩٢٩٤٢
٦	٧٧٨١٥	٦	٤١٤٩٧	٦	٦٦٢٧٦	٦	٨١٩٥٤	٦	٩٣٤٥٠
٧	٨٤٥١٠	٧	٤٣١٣٦	٧	٦٧٢١٠	٧	٨٢٦٠٧	٧	٩٣٩٥٢
٨	٩٠٣٠٩	٨	٤٤٧١٦	٨	٦٨١٢٤	٨	٨٣٢٥١	٨	٩٤٤٤٨
٩	٩٥٤٢٤	٩	٤٦٢٤٠	٩	٦٩٠٢٠	٩	٨٣٨٨٥	٩	٩٤٩٣٩
١١	٠٤١٣٩	٣١	٤٩١٣٦	٥١	٧٠٧٥٧	٧١	٨٥١٢٦	٩١	٩٥٩٠٤
٢	٠٧٩١٨	٢	٥٠٥١٥	٢	٧١٦٠٠	٢	٨٥٧٣٣	٢	٩٦٣٧٩
٣	١١٣٩٤	٣	٥١٨٥١	٣	٧٢٤٢٨	٣	٨٦٣٣٢	٣	٩٦٨٤٨
٤	١٤٦١٣	٤	٥٣١٤٨	٤	٧٣٢٣٩	٤	٨٦٩٢٣	٤	٩٧٣١٣
٥	١٧٦٠٩	٥	٥٤٤٠٧	٥	٧٤٠٣٦	٥	٨٧٥٠٦	٥	٩٧٧٧٢
٦	٢٠٤١٢	٦	٥٥٦٣٠	٦	٧٤٨١٩	٦	٨٨٠٨١	٦	٩٨٢٢٧
٧	٢٣٠٤٥	٧	٥٦٨٢٠	٧	٧٥٥٨٧	٧	٨٨٦٤٩	٧	٩٨٦٧٧
٨	٢٥٥٢٧	٨	٥٧٩٧٨	٨	٧٦٣٤٣	٨	٨٩٢٠٩	٨	٩٩١٢٣
٩	٢٧٨٧٥	٩	٥٩١٠٦	٩	٧٧٠٨٥	٩	٨٩٧٦٣	٩	٩٩٥٦٤

XX — ربح مرکب

۱۲۶ — تعریف — اگر مبلغی را با نرخ معینی بمرابحه بگذاریم و در آخر هر سال سود آنرا بسرمایه افزوده سرمایه سال بعد قرار دهیم گوئیم آن مبلغ بربح مرکب داده شده است.

۱۲۷ — در ربح مرکب معمولا نرخ عبارتست از سود یک ریال در یکسال.

۱۲۸ — اگر a سرمایه و r نرخ و A مجموع سرمایه و سود پس از n سال باشد:

$$A = a(1+r)^n \qquad (1)$$
$$\log A = \log a + n\log(1+r) \qquad (2)$$

از فورمول (۲) میتوان فورمولهای زیر را بدست آورد:

۱) $\log a = \log A + n\,\text{colog}(1+r)$

۲) $n = \dfrac{\log A + \text{colog}\, a}{\log(1+r)}$

۳) $\log(1+r) = \dfrac{\log A + \text{colog}\, a}{n}$

فورمول (۲) در مواردیکه مدت صحیح یا کسری باشد استعمال میشود.

XXI قسط السنین

۱۲۹ — تعریف — قسط السنه مبلغ پولی است که کسی برای تشکیل سرمایه یا پرداخت قرض مرتبا در اول یا آخر هر

سال درمدت چندسال میپردازد .

۱۳۰ – قسط السنین برای تشکیل سرمایه

فرض میکنیم a ریال مبلغی باشد که در اول هر سال پرداخته میشود و r سود سالیانه یکریال در یکسال و A ریال مبلغ آخری که در آخر سال n ام بدست میآید باشد در اینصورت :

$$A = a(1+r) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$a = \frac{Ar}{1+r} \cdot \frac{1}{(1+r)^n - 1}$$

۱۳۱ – تبصره – محاسبه r یا n از روی سه عامل معلوم دیگر بتقریب بکمک جدولهای عددی مخصوص بدست میآید .

۱۳۲ – قسط السنین برای استهلاک دین

– اگر A ریال مبلغ دریافتی و a ریال مبلغ قسط پرداختی درآخرهرسال و n عده اقساط و r سود سالیانه یك ریال باشد .

$$a = Ar \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

مبلغ استهلاکی α_1 درآخرسال اول عبارت خواهد بود $\alpha_1 = a - Ar$ ومبلغ استهلاکی α_p و در آخر سال p ام عبارتست از :

$$\alpha_p = \alpha_1 (1+r)^{p-1} = (a - Ar)(1+r)^{p-1}$$

XXII نمایش هندسی

۱۳۳ – تعریف – برای اینکه نقطهٔ M را بموازات امتداد △ برخط (I تصویر کنیم از M خطی موازی △ میکشیم تا (I را قطع کند. تصویر نقطهٔ N بموازات صفحهٔ (I برخط △ محل تلاقی △ با صفحه ایست که از N بموازات (I رسم شود.

۱۳۴ محور – مبدأ – مختصات – هر گاه از روی خط نامحدود X'X جهتی مثلا از چپ براست، را مثبت اختیار کنیم آن خط تشکیل یك محور میدهد. نقطهٔ ثابت O واقع بر محور را که نقاط دیگر محور بوسیله فاصله‌شان از آن مشخص میگردند مبدأ میگویند.

خطی را که از مبدأ یك نقطهٔ غیر واقع بر محور وصل کنند **شعاع حامل** آن نقطه نامند.

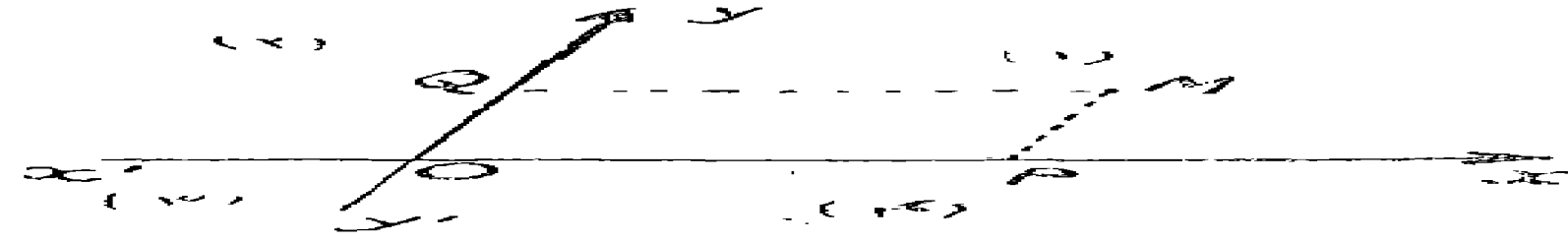
برای معین ساختن جای هر نقطه بر روی خط، صفحه یا فضا مشخصاتی لازمست که آنها را مختصات گویند.

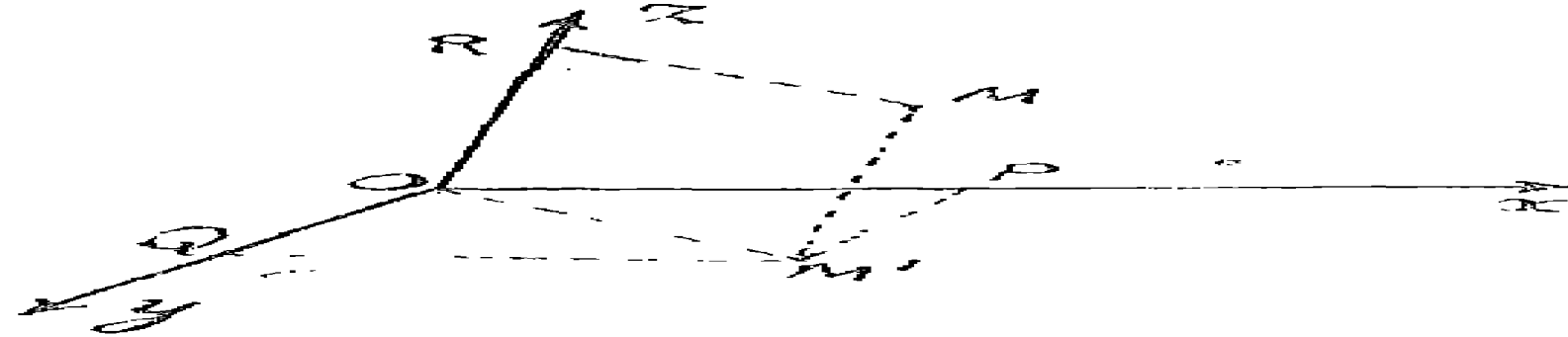
فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر محور را از مبدأ **طول** یا **ابسیس** آن نقطه نامند. طول نقطه برای مشخص ساختن هر نقطهٔ واقع بر محور کافیست.

هر نقطهٔ صفحه ممکن است بوسیله تصاویر برش بر دو محور متقاطع (مختصات دکارتی) یا بکمك طول شعاع حامل و زاویه این شعاع با محور (مختصات قطبی) مشخص شود.

هر نقطه در فضا بوسیله تصاویر برش بر سه محور متقاطع غیر واقع در یك صفحه (مختصات دکارتی) یا با شعاع حامل و زاویه

این شعاع با یک صفحه که بر مبداء میگذرد دو زاویه تصویر بر شعاع حامل بر روی این صفحه با محوری که بر مبداء مرور نماید (مختصات قطبی) معین میگردد .

۱۳۵ - مختصات دکارتی - ۱) در صفحه - دو محور متقاطع ox و oy اختیار میکنیم و نقطهٔ M را بموازات OX بر OY و بموازات OY بر OX تصویر میکنیم تا P و Q بدست آید . OP را طول یا آبسیس و OQ را عرض یا (Ordonnée) نقطهٔ M میگویند .

شکل ۱

دو محور نا محدود ox و oy صفحه را بچهار ناحیه تقسیم میکنند (ش ۱) در ناحیه ۱ هر دو مختص مثبت ، در ناحیه ۲ طول منفی و عرض مثبت ، در ناحیه ۳ هردو منفی و در ناحیه ٤ طول مثبت وعرض منفی میباشند .

۲) در فضا - نقطه M را بر هر یک از سه محور متقارب ox ، oy ، oz بموازات صفحهای که بر دو محور دیگر میگذرد تصویر میکنیم تا P و Q و R بدست آیند (ش ۲) OP و OQ و OR را بترتیب طول و عرض و ارتفاع (بلندی یا Cote) نقطهٔ M میگویند .

شکل ۲

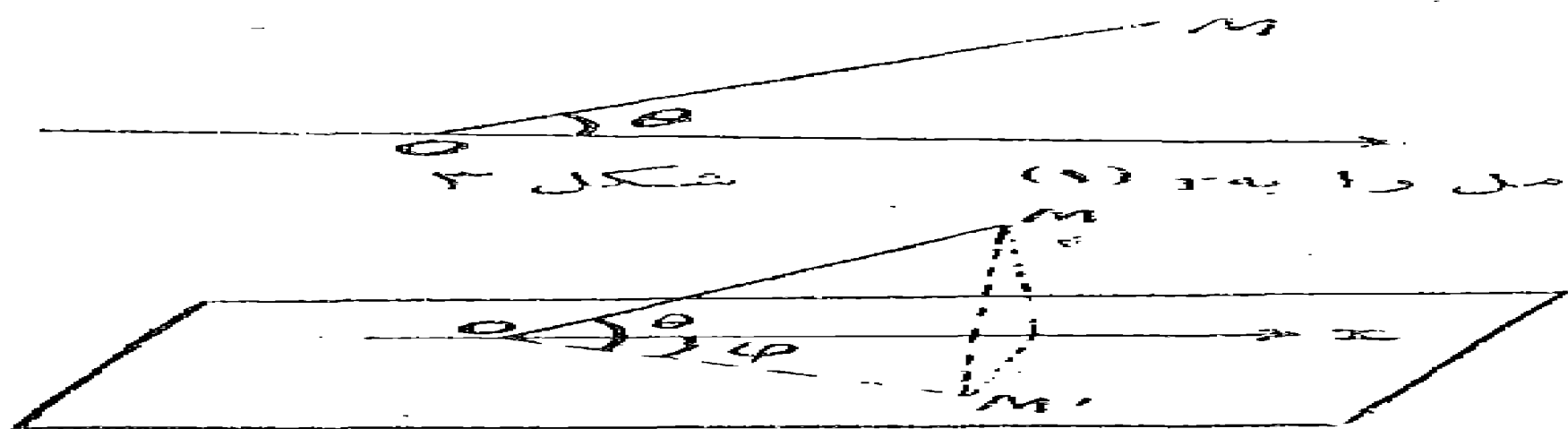
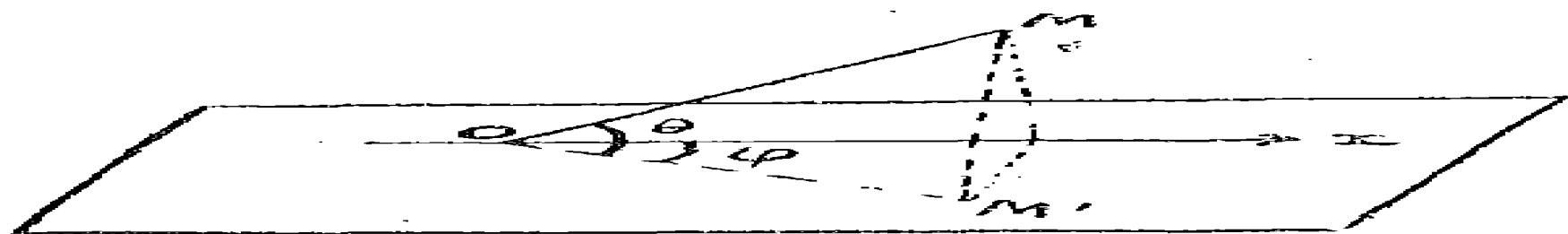
تبصره - معمولاً محورهای مختصات را عمود بر هم اختیار

میکنند و مختصات را قائم مینامند .
ما از این پس فقط از مختصات دکارتی قائم صحبت خواهیم کرد .
قرارداد — درخواندن مختصات ابتدا طول ، بعد عرض
و بعد از آن ارتفاع نقطه را میخوانیم و بهمین ترتیب از چپ
براست مینویسیم : ($M(x, y, z)$)

۱۳۶ — مختصات قطبی
۱) در صفحه — OM را
شعاع حامل و θ زاویه بین
OM و جهت مثبت محور
را معمول مینامند • شعاع حامل را به ρ (۱)
نمایش میدهند (ش ۳)

شکل ۳

۲) در فضا — در صفحه
(P) که بر مبداء O
میگذرد محور Ox را
اختیار میکنیم • آنگاه
شعاع حامل OM را بر
صفحهٔ (P) تصویر مینمائیم
تا OM' بدست آید

شکل ٤

زاویه MOM' را θ و زاویه $M'Ox$ را φ مینامیم •
$OM = r$ و θ و φ مختصات قطبی نقطه M هستند (ش ٤)
۱۳۷ — بستگی بین مختصات قطبی و مختصات
قائم — ۱) در صفحه — (ش ٥)

(۱) — شعاع حامل را با حرف یونانی (رو) نمایش میدهند
و در شکل هم همان حرف نوشته شده ولی چون در چاپخانه آنحرف
موجود نبود در متن بجای آن r گذاشته شده است

$$\begin{cases} OP = x = r\cos\theta \\ OQ = y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = tg\,\theta \end{cases}$$

ش ٥

۲ – در فضا (ش ٦)

$$OM' = OM\cos\theta = r\cos\theta$$

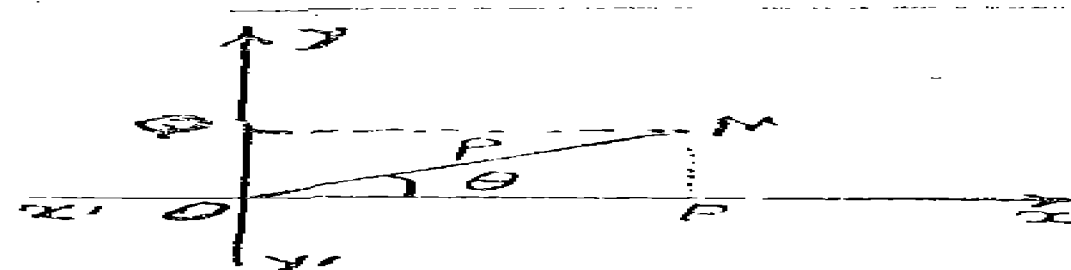
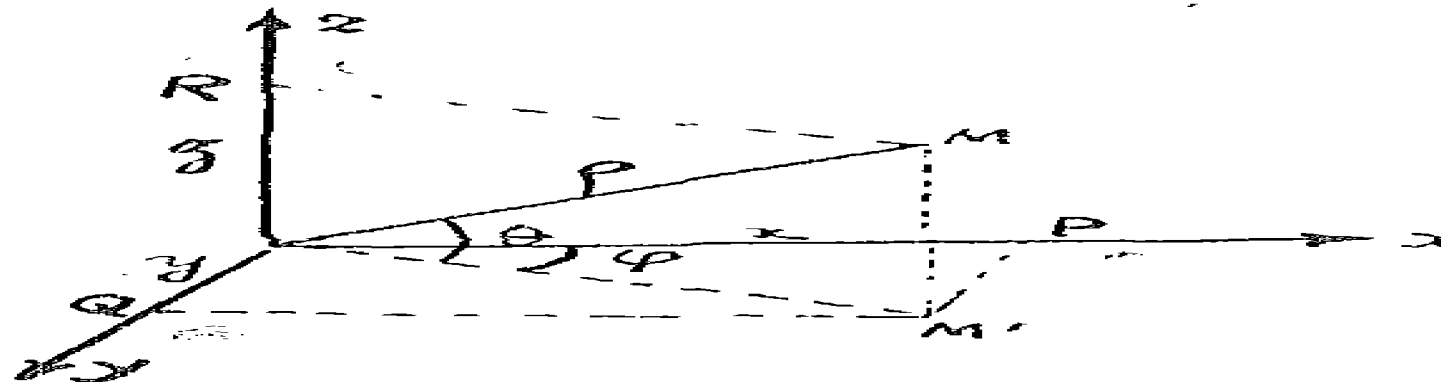
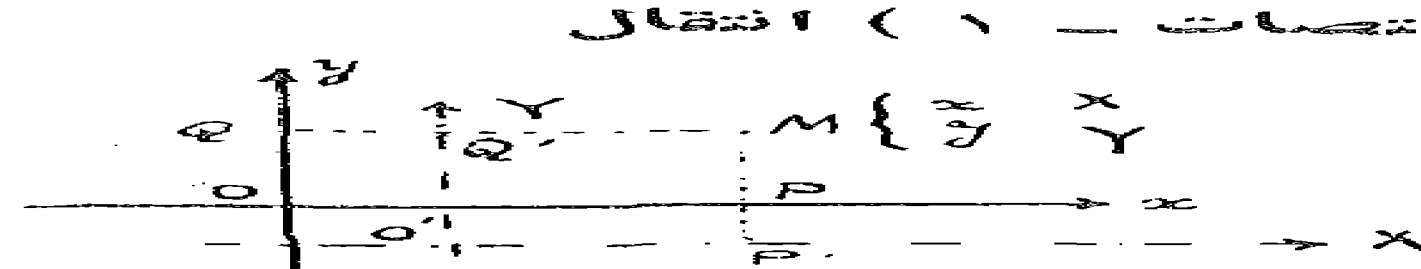
$$\begin{cases} x = OP = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = OQ = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = OR = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = tg\,\varphi \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = tg\,\theta \end{cases}$$

ش ٦

۱۳۸ – مختصات کروی

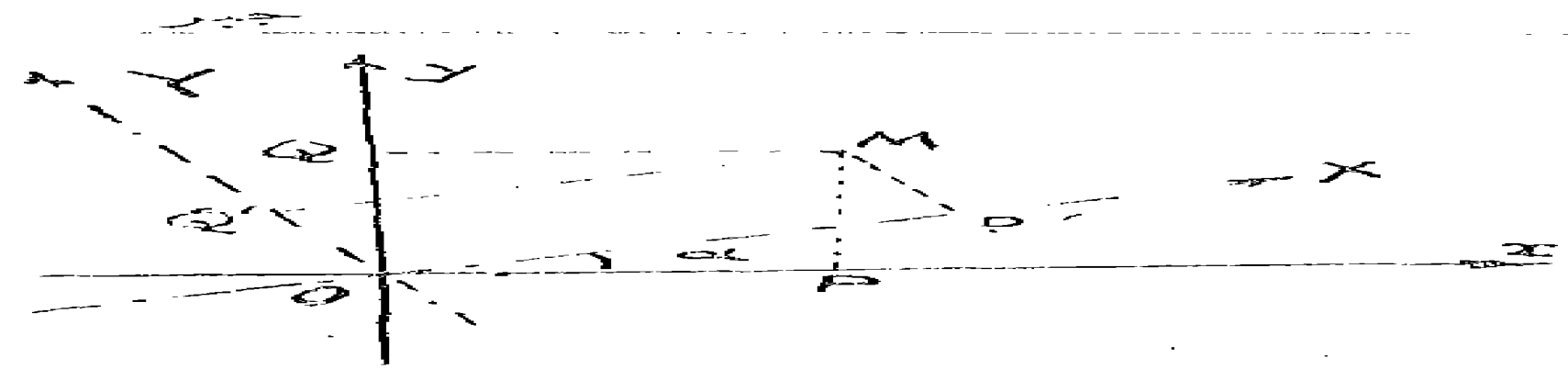
رجوع شود بقسمت هیئت.

۱۳۹ – تغییر محور های مختصات – ۱) انتقال محور ها – هر گاه محور های مختصات OX و OY را بموازات خود حرکت دهیم تا بوضع O'X و O'Y درآیند (ش ۷) و مختصات نقطه M را نسبت بدو محور اول x و y و نسبت بمحورهای دوم X و Y انگاشته و مختصات نقطه O' را α و β بنامیم

شکل ۷

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

۲) دوران محورها

اگر محورهای Ox و Oy بمقدار دورانی باندازه زاویه φ بوضع OX و OY درآیند (ش ۸) و مختصات یك نقطه M را نسبت باولیها x و y و نسبت بدومیها X و Y بنامیم، از تصویر کردن دورهٔ چندبر (کثیر الاضلاع) OPMP' بر روی محور مقتضی چنین خواهیم داشت:

شکل ۸

تصویر (OP') = تصویر PM + تصویر OP + تصویر MP'

یعنی:

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

و

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi$$
$$y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi$$

و

$$X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$$

۱٤۰ – طول قطعهٔ خط. – ۱) درازی هر قطعه خط که بر محوری قرار داشته باشد برابر است با طول منتها منهای طول مبداء آن.

۲ – اگر مبداء قطعه خطی نقطهٔ A (x_1، y_1، z_1) و منتهای آن نقطهٔ B (x_2، y_2، z_2) باشد:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

۱۴۱ - تقسیم قطعه خط به نسبت k

هرگاه نقطه $M(X,Y,Z)$ قطعه خط AB را که مختصات دو انتهای آن $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ باشند به نسبت k تقسیم نماید، یعنی $= k$ باشد:

$$M \begin{cases} X = \dfrac{k x_2 + x_1}{k+1} \\ Y = \dfrac{k y_2 + y_1}{k+1} \\ Z = \dfrac{k z_2 + z_1}{k+1} \end{cases}$$

۱۴۲ - تبصره ۱) اگر M وسط AB باشد ۱ = K پس مختصات وسط قطعه خط واسطه عددی مختصات مبداء و منتهای قطعه اند.

۲) مختصات مرکز ثقل مثلث مساوی $\frac{1}{3}$ مجموع مختصات سه رأس آن است.

۱۴۳ - روابط مهم:

الف - رابطه شال Chasle

۱ - اگر سه نقطه A و B و C بر روی یک محور باشند:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

۲ — اگر n نقطه A و B و C و ... و K و L بر روی یك محور باشند :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LA} = 0$$

یا

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{KL}$$

ب — رابطهٔ فیثاغورث

اگر دو نقطه A و B بطولهای a و b برروی محوری واقع باشند و M وسط AB باشد (شماره ۴۵)

$$OM^2 - AM^2 = OA \times OB$$

ج — رابطهٔ اولر

اگر سه نقطه A و B و C بطولهای a و b و c برروی محوری فرض شوند (شماره ۴۶)

$$\overline{OA} \cdot \overline{BC} + \overline{OB} \cdot \overline{CA} + \overline{OC} \cdot \overline{AB} = 0$$

د — رابطهٔ استوارت

اگر سه نقطه A و B و C بطولهای a و b و c برروی محوری فرض شوند (شماره ۴۷)

$$\overline{OA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{OB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{OC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$

ه — اگر نقاط A و B و C و D بطولهای a و b و c و d محور OX را بر نسبت توافقی تقسیم نموده باشند :

۱ — $(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$

۲ — اگر O وسط AB فرض شود : $a = -b$

و $a^2 = cd$

۳ — اگر (۱) برروی ۸ فرض شود : $a = 0$

و $\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

XXIII - متغیر و تابع

۱۴۴ — هرچیز تغییر پذیر را متغیر گویند .

۱۴۵ — تابع - اگر مابین دو متغیر رابطه‌ای موجود باشد بطوریکه تغییر یکی بستگی بتغییر دیگری داشته باشد دومی را متغیر اصلی و اولی را متغیر تابع یا تابع میگویند .

در بیان رابطه دو متغیر هر یک را میتوان بدون تفاوت تابع دیگری دانست .

تابع باینصورت نمایش داده میشود : $y = f(x)$

۱۴۶ — قرینه - اگر در تابع $y = f(u)$ ، u خود تابعی از x باشد y را تابع تابع x نامند .

۱۴۷ — تابع معین آنستکه بازاء جمیع مقادیر یکه بمتغیر داده شوند دارای مقدار معینی باشد (یعنی موهوم یا مبهم یا ∞ نباشد)

۱۴۸ — تابع اتصالی - تابع $y = f(x)$ را بازاء $x = a$ اتصالی گویند بشرط آنکه $f(a) = y$ مقداری معین باشد .

۱۴۹ — تابع انفصالی - تابع $y = f(x)$ را

بازاء $x = a$ انفصالی گویند اگر $f(a)$ مقدار معینی نباشد.

توضیح — توابع معین همیشه انفصالی هستند و توابع نامعین بازاء مقادیری از متغیر که تابع نامعین است انفصالی میباشند.

۱۵۰ — **تابع صعودی** — تابع را صعودی گویند اگر تابع و متغیر باهم بالا و پائین بروند. مثلا قیمت پارچه تابع صعودی طول آنست.

۱۵۱ — **تابع نزولی** — تابع را نزولی گویند وقتی که جهت تغییرات تابع و متغیر مخالف باشد مثلا مدت لازم برای ساختمان یک بنا تابع نزولی تعداد کارگرانیست که بکار گمارده میشوند.

۱۵۲ — تابع را **متناوب** گویند اگر بازاء مقادیر متعددی از متغیر که تفاضل هر دو مقدار متوالی آنها مقدار ثابتی باشد تابع یک مقدار اختیار نماید این تفاضل ثابت را **دوره تناوب** گویند.

مثلا $y = \sin x$ تابع متناوبی است که 2π دوره تناوب آنست.

XXIV — حدود

۱۵۳ — هرگاه متغیری حین تغییر بعدد معینی نزدیک شده ولی هیچگاه مساوی آن نگردد آن عدد را حد متغیر گویند. اگر متغیر از حد کوچکتر باشد حد را فوقانی وگرنه تحتانی نامند.

مثال: محیط دایره حد فوقانی محیط کثیر الاضلاع محاطی و حد تحتانی محیط کثیر الاضلاع محیطی است وقتی عدد اضلاع آنها

بی نهایت زیاد شود. بعبارت دیگر عدد m حد متغیر x است درصورتیکه قدر مطلق $(m - x)$ از هر عدد مثبت کوچکی کوچکتر شود وقتیکه x بینهایت به m نزدیک گردد.

۱۵۴ - خواص حدود

۱ - حد مجموع جبری چند تابع از متغیر x وقتی که x بسمت حدی میل نماید، مساوی است با مجموع حدود آنها.

۲ - حد حاصل ضرب چند تابع از متغیر x وقتی که x بسمت حدی میل نماید، مساوی است با حاصلضرب حدود آنها.

۳ - حد خارج قسمت دو تابع از متغیر x وقتی که x بسمت حدی میل نماید، مساوی است با خارج قسمت حدود آنها بشرط آنکه حد تابع مقسوم علیه مخالف صفر باشد.

۴ - حد توان m ام (یا ریشه m ام) یک تابع مساوی است با قوه m ام (یا ریشه m ام) حد آن تابع.

۵ - حد کثیر الجمله صحیحی از x بازاء $x = \pm\infty$ مساوی است با ∞ و علامتش علامت جمله ایست که بزرگترین نماینده را دارا باشد.

XXV - رفع ابهام

۱۵۵ — تعریف - اگر تابعی بازاء مقدار معینی از متغیر بیکی از صورتهای $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0 \times \infty$ یا $(\infty - \infty)$ در آید گویند تابع بازاء آن مقدار مبهم است. و پیدا کردن مقدار حقیقی تابع را بازاء آن مقدار **رفع ابهام** گویند.

۱۵۶ — **رفع ابهام** - ۱) صورت $\frac{0}{0}$ - در موقعی پیدا می

شود که صورت و مخرج تابع $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازای $x = a$ دارای ریشهٔ مشترک $x = a$ باشند، و برای رفع ابهام باید عامل مشترک $x - a$ را هر چند دفعه که ممکن باشد از صورت و مخرج حذف نمود.

۲) $0 \times \infty$ را میتوان بصورت $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$ یا $\frac{0}{0}$ نوشت.

۳) $\frac{\infty}{\infty}$ را میتوان بصورت $\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}$ یا $\frac{0}{0}$ نوشت

۴) صورت $(\infty - \infty)$ - اگر در تابع $y = f(x) - \varphi(x)$ بازای $x = a$ ، $f(a) = \infty$ و $\varphi(a) = \infty$ باشد، آنرا در $\frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x) + \varphi(x)}$ ضرب میکنیم تا بصورت $\frac{f^2(x) - \varphi^2(x)}{f(x) + \varphi(x)}$ درآید بعد صورت و مخرج را بر $f^2(x)\,\varphi^2(x)$ تقسیم مینمائیم تا بشود:

$$y = \frac{\frac{1}{\varphi^2(x)} - \frac{1}{f^2(x)}}{\frac{1}{f(x)\varphi^2(x)} + \frac{1}{\varphi(x) f^2(x)}}$$

این کسر بازاء $x = a$ مساوی $\frac{0}{0}$ است.

۱۵۷ — نتیجه - مقدار حقیقی کسر $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازاء

$= \pm\infty$:

۱ — اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد ، $\pm\infty$ است .

۲ — اگر درجه صورت مساوی درجه مخرج باشد مساوی است باخارج قسمت ضرایب جملی که دارای بزرگترین نما هستند .

۳ — اگر درجه صورت از مخرج کوچکتر باشد مساوی صفر است .

XXVI - مشتقات

۱۵۸ — تعریف - اگر متغیر x از مقدار x_1 تا مقدار x_2 تغییر کند میگویند باندازه ($x_2 - x_1$) نمو کرده است و این نمو را با علامت Δx نشان میدهند .

در تابع $y = f(x)$ بازاء هر نمو Δx تابع نموی مانند Δy خواهد داشت .

۱۵۹ — تعریف - مشتق تابع $y = f(x)$ عبارتست از حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر .

مشتق تابع $y = f(x)$ را به y' یا $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نمایش میدهند .

۱۶۰ — مشتقات متوالی - چون مشتق هر تابع خود تابعی از متغیر میباشد ممکن است از آنهم مشتق گرفت . این

مشتق را مشتق دوم تابع اصلی گویند. بهمین طریق ممکن است مشتق سوم و چهارم و ... و m ام گرفت.

۱۶۱ — **مشتق تابع تابع** — در تابع تابع $y = f(u)$ که $u = \varphi(x)$ ممکن است مشتق y را بر حسب u یا بر حسب x بدست آورد و بین آنها این رابطه برقرار است:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

۱۶۲ — محاسبه مشتق و خواص آن

۱ — مشتق مقادیر ثابت صفر است.

۲ — مشتق مجموع چند تابع:

$$\begin{cases} y = u + v - w \\ y' = u' + v' - w' \end{cases}$$

۳ — مشتق حاصلضرب چند تابع:

$$\begin{cases} y = u.v \\ y' = uv' + vu' \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = u.v.w \\ y' = u'vw + v'uw + w'uv \end{cases}$$

۴ — مشتق خارج قسمت دو تابع:

$$\begin{cases} y = \frac{u}{v} \\ y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \end{cases}$$

۵ — مشتق قوهٔ m ام یک تابع

$$\begin{cases} y = u^m \\ y' = m u' u^{m-1} \end{cases}$$

۶ ـ مشتق ریشه m ام یک تابع

$$\begin{cases} y = \sqrt[m]{u^n} \\ y' = \dfrac{n}{m} u' \times \dfrac{1}{\sqrt[m]{u^{m-n}}} \end{cases}$$

۱۶۳ ـ مشتق توابع متداول

۱ ـ $y = c \qquad y' = 0$

۲ ـ $y = x \qquad y' = 1$

۳ ـ $y = x^m \qquad y' = m x^{m-1}$

۴ ـ $y = a x^m \qquad y' = a m x^{m-1}$

۵ ـ $y = \dfrac{1}{x} \qquad y' = -\dfrac{1}{x^2}$

۶ ـ $y = \dfrac{a}{x^m} \qquad y' = -\dfrac{am}{x^{m+1}}$

۷ ـ $y = \sqrt{x} \qquad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

۸ ـ $y = \sqrt[m]{x} \qquad y' = \dfrac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$

مشتق توابع مستدیره :

٩ – $y = \sin x$ $y' = \cos x$

١٠ – $y = \cos x$ $y' = -\sin x$

١١ – $y = tg x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

١٢ – $y = \cot x$ $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$

١٣ – $y = \sin u$ $y' = u' \cos u$

١٤ – $y = \cos u$ $y' = -u' . \sin u$

١٥ – $y = tg u$ $y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

١٦ – $y = \sin^2 x$ $y' = 2 \sin \cos x = \sin 2x$

١٧ – $y = \cos^2 x$ $y' = -2 \cos \sin x = -\sin 2x$

١٨ – $y = \sin(mx + \alpha)$ $y' = m \cos(mx + \alpha)$

١٩ – $y = \cos(mx + \alpha)$ $y' = -m \sin(mx + \alpha)$

٢٠ – $y = tg(mx + \alpha)$ $y' = \frac{m}{\cos^2(mx + \alpha)}$

٢١ – $y = \cot g(mx + \alpha)$ $y' = -\frac{m}{\sin^2(mx + \alpha)}$

٢٢ – $y = \arc \sin x$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

٢٣ – $y = \arc \cos x$ $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

۲۴ - $y = \text{arctg}x$ $\qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$

۲۵ - $y = \text{arc cotg}x$ $\qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$

خواص مشتق

۱۶۴ — مشتق تابع صعودی مثبت و مشتق تابع نزولی منفی است .

۱۶۵ — مشتق تابع بازاء طول نقاط ماکزیمم و مینیمم صفر است .

۱۶۶ — طول نقطهٔ عطف منحنی نمایش یک تابع ریشه مشتق ثانی آن تابع است .

رفع ابهام بوسیله مشتق

۱۶۷ — اگر در کسر $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازاء $f(a) = 0$ و $\varphi(a) = 0$ باشد مقدار حقیقی آن مساوی است با مقدار حقیقی خارج قسمت مشتقات صورت ومخرج کسر بازاء $x = a$

مثال - مقدار حقیقی کسر

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3}$$

را بازاء $x = 1$ باید تعیین کرد .

حل - از $f(x)$ و $\varphi(x)$ مشتق میگیریم

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{4x^3 - 15x^2 + 18x - 7}{4x^3 - 18x^2 + 24x - 10}$$

چون این کسر هم بازاء $x=1$ مساوی $\frac{0}{0}$ است باردیگر از $f'(x)$ و $\varphi'(x)$ مشتق بگیریم:

$$\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \frac{12x^2 - 30x + 18}{12x^2 - 36x + 24}$$

مقدار این کسر نیز بازاء $x=1$ مساوی $\frac{0}{0}$ است، باردیگر از $f''(x)$ و $\varphi''(x)$ مشتق میگیریم

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)} = \frac{24x - 30}{24x - 36}$$

مقدار این کسر بازاء $x=1$ مساوی $\frac{1}{2}$ است بنا بر این مقدار حقیقی $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ بازاء $x=1$ نیز $\frac{1}{2}$ است.

XVII — تغییرات توابع

۱۶۸ — **تعریف** — مقصود از تعیین تغییرات تابع $y=f(x)$ تحقیق در جهت تغییرات آن تابع است بازاء مقادیر مختلف x وقتیکه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، یعنی تعیین آنکه تابع در چه فواصلی صعودی و در چه فواصلی نزولی است و بازاء چه مقادیری از x ماکزیمم یا می‌نیمم یا مساوی صفر میباشد.

۱۶۹ — **تغییرات تابع درجه اول $y=ax+b$**

وقتی x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر نماید تغییرات تابع y بستگی بعلامت a دارد، اگر a مثبت باشد تابع صعودی و اگر منفی باشد تابع نزولی است.

x		$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
y	$a>0$	$-\infty$	↗	۰	↗	$+\infty$
	$a<0$	$+\infty$	↘	۰	↘	$-\infty$

ماکزیمم و می نیمم

۱۷۰ - تعریف - اگر تابع $y=f(x)$ بازاء $x=a$ اتصالی بوده و بازاء $x=a-\varepsilon$ (ε مقدار بست مثبت و بی نهایت کوچك) صعودی و بازاء $x=a+\varepsilon$ نزولی باشد میگویند تابع بازاء $x=a$ ماکزیمم است ؛ و هرگاه تابع بازاء $x=a-\varepsilon$ نزولی و بازاء $x=a+\varepsilon$ صعودی باشد گویند تابع بازاء $x=a$ می نیمم میباشد .

۱۷۱ - تعیین ماکزیمم و می نیمم بوسیلهٔ مشتق - برای بدست آوردن ماکزیمم و می نیمم تابعی مشتق آن را مساوی صفر قرار میدهیم و جواب های آنرا بجای x در تابع میگذاریم . مقداری که برای y بدست میآید ماکزیمم است هرگاه تابع قبل از آن صعودی و بعد از آن نزولی باشد و می نیمم است هرگاه تابع پیش از آن نزولی و بعد از آن صعودی باشد (شماره ۱۶۵)

۱۷۲ - طریقهٔ مستقیم برای تعیین ماکزیمم و می نیمم بعضی توابع - ممکنست بدون استعمال مشتق در بعضی از توابع مقدار ماکزیمم یا می نیمم را مستقیما بدست آورد . این امر در مواردی ممکنست که هرگاه تابع $y=f(x)$ را برحسب قوای نزولی x مرتب نمائیم و y را پارامتر فرض کنیم بتوان برای معادلهٔ اخیر ریشهٔ مضاعف بدست آورد ؛ در اینصورت مقادیری

از پارامتر x که بازاء آنها معادله ریشهٔ مضاعف پیدا کند ماکزیمم یا می نیمم تابع هستند.

مثال — تابع $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$ را نسبت به x مرتب می کنیم.

$$(y - 1)x^2 - 2(y + 1)x + 3(y + 1) = 0 \quad (1)$$

معادله (۱) بازاء

$$\Delta' = (y + 1)^2 - 3(y + 1)(y - 1) = 0 \quad (2)$$

ریشهٔ مضاعف دارد و $y_1 = -1$ و $y_2 = 2$ ریشه‌های معادلهٔ (۲) ماکزیمم و می نیمم تابع مذکور میباشند.

۱۷۳ — ماکزیمم و می نیمم مطلق

ا — اگر حاصل‌جمع چند عدد مثبت ثابت باشد حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که همه آن اعداد باهم مساوی باشند.

ب — اگر حاصل‌ضرب چند عدد مثبت ثابت باشد مجموع آنها موقعی می نیمم است که همه آنها باهم مساوی باشند.

۱۷۴ — تغییرات تابع درجهٔ دوم $y = ax^2 + bx + c$

تابع را میتوان بصورت

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

نوشت (شمارهٔ ۷۲)

حال چون x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند قدر مطلق تغییرات y بستگی به تغییرات $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ و جهت تغییرات آن بستگی

بعلامت a دارد. این تغییرات را میتوان در جدول ذیل (که در آن $M=\frac{4ac-b^2}{4a}$ فرض شده است) خلاصه کرد:

x	$-\infty$	↗	$-\frac{b}{2a}$	↗	$+\infty$
$x+\frac{b}{2a}$	$-\infty$	↗	۰	↗	$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	↘	۰	↗	$+\infty$
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+M$	$+\infty$	↘	$\frac{M}{a}$	↗	$+\infty$
y { $a>0$	$+\infty$	↘	M می نیمم	↗	$+\infty$
y { $a<0$	$-\infty$	↗	M ماکزیمم	↘	$-\infty$

اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ در دو طرف $-\frac{b}{2a}$ قرار داشته y بازاء آنها تابع صفر است.

۱۷۵ — تغییرات تابع دو مجذوری $y=ax^4+bx^2+c$

تابع را میتوان بصورت $y=a\left[\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$ نوشت و تغییرات آن وقتی که x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند در جدول ذیل خلاصه میشود $\left(M=\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$:

x		$-\infty$ ↗	$-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$	↗	0	↗	$+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$	↗	$+\infty$
$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$	$\frac{b}{a}<0$	$+\infty$ ↘	0	↗	$\frac{b^2}{4a^2}$	↘	0	↗	$+\infty$
	$\frac{b}{a}>0$	$+\infty$	↘		$\frac{b^2}{4a^2}$		↗		$+\infty$
y ، $a>0$	$b>0$	$+\infty$	↘		مینیمم c		↗		$+\infty$
	$b<0$	$+\infty$ ↘	مینیمم M	↗	ماکزیمم c	↘	مینیمم M	↗	$+\infty$
$a<0$	$b>0$	$-\infty$ ↗	ماکزیمم M	↘	مینیمم c	↗	ماکزیمم M	↘	$-\infty$
	$b<0$	$-\infty$	↗		ماکزیمم c		↘		$-\infty$

در صورتیکه $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a}$ باشند چهار ریشهٔ معادلهٔ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ در دوطرف $\mp\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ قرار می‌گیرند و تابع بازاء آنها صفر است. هرگاه $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ باشند دو ریشه معادله یکی طرف چپ $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و دومی طرف راست $+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ قرار میگیرند.

XXVIII — نمایش هندسی توابع

۱۷۶ — تعریف ۱ — در تابع $y = f(x)$ بازاء هر مقدار x مقداری برای y پیدا میشود. چون این دومقدار را مختصات نقطه‌ای مانند M فرض کنیم نسبت بدو محور عمود برهم $x'Ox$ و $y'Oy$ وضع آن نقطه را میتوان مشخص کرد. چون x، y ودر نتیجه y، تغییر کنند M درصفحه تغییر جا میدهد و ازحرکت آن یك منحنی پدید می‌آید. این منحنی را منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ میگویند.

پس هر نقطه که بر منحنی باشد مختصاتش در رابطهٔ $y = f(x)$ صدق میکند و هر نقطه که مختصاتش در آن رابطه صدق کند برروی منحنی است.

تعریف ۲ — منحنی مکان هندسی نقاطی است که بر حسب قاعدهٔ معینی، در صفحه یا در فضا، تغییر مکان دهند. رابطه‌ای که این قاعده را بیان می کند معادلهٔ منحنی است.

نمایش تغییرات تابع درجهٔ اول $ax + by + c = 0$

١٧٧ – قضیه – منحنی نمایش تغییرات تابع درجه اول خطی است مستقیم.

١٧٨ – قضیه – مختصات نقاط هر خط مستقیم در معادلهٔ درجه اول $ax+by+c=0$ صدق میکنند.

١٧٩ – قضیه – در هر معادلهٔ درجه اول $ax+by+c=0$:

اولاً: ا) هرگاه $a=0$ باشد، $by+c=0$ یا $y=-\frac{c}{b}$. منحنی نمایش y خطی است موازی محور x ها.

ب) معادلهٔ هر خط که موازی محور x ها باشد $y=d$ است.

ثانیاً: ا) هرگاه $b=0$ باشد، $x=-\frac{c}{a}$. منحنی نمایش x خطی است موازی محور y ها.

ب) معادلهٔ هر خط موازی محور y ها $x=e$ است.

ثالثاً: ا) اگر $c=0$ باشد $y=-\frac{a}{b}x$؛ منحنی خطی است که بر O، مبداء مختصات، میگذرد.

ب) معادلهٔ هر خط که بر مبداء مختصات بگذرد $y=mx$ است.

رابعاً: اگر a و b و c مخالف صفر باشند خط محورها را در دو نقطه قطع میکند و معادلهٔ آن بصورت $y=mx+n$ است. در اینصورت m ضریب زاویه‌ای و n عرض از مبداء خط است.

١٨٠ – ضریب زاویه‌ای هر خط تانژانت زاویه ایست که این خط با جهت مثبت محور x ها تشکیل میدهد. پس ضریب

زاویه‌ای خطوط موازی محور x ها صفر و از آن خطوط موازی محور y ها ∞ است.

۱۸۱ - زاویهٔ دو خط - اگر m و m' ضریب زاویه ای دو خط Δ و Δ' و α زاویه بین آنها باشد:

$$tg\,\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

دو خط موازی: اگر $\alpha = 0$ باشد $m = m'$ یعنی ضرایب زاویه‌های دو خط موازی مساویند.

دو خط عمود برهم: اگر $\alpha = \frac{\pi}{2}$ باشد $tg\,\alpha = \infty$

یعنی $1 + mm' = 0$ پس $m' = -\frac{1}{m}$ یعنی اگر خطی بر خط دیگر عمود باشد ضریب زاویه ایش مساوی عکس ضریب زاویهٔ دیگر است با علامت مخالف.

۱۸۲ - معادلهٔ خطی که بر یك نقطه میگذرد - معادله خط Δ که با ضریب زاویه‌ای m بر نقطهٔ $M(x', y')$ میگذرد:

$$y - y' = m\,(x - x')$$

۱۸۳ - معادلهٔ خطی که بر دو نقطه میگذرد - اگر مختصات دو نقطه را بترتیب (x', y') و (x'', y'') فرض کنیم

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

حالت مخصوص - معادله خطی که از نقاط $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ بگذرد:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(a و b را بترتیب طول و عرض از مبدء خط گویند).

۱۸٤ ـ **فاصله نقطه از خط** ـ فاصله نقطه $M(x',y')$ از خطی که معادله‌اش $ax+by+c=0$ میباشد عبارتست از :

$$d = \frac{ax'+by'+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۱۸۵ — **رسم خط** ـ برای رسم یک خط کافی است مختصات دو نقطه آنرا بدست آوریم . بهتر این است که طول یکی از این نقاط و عرض دیگری را صفر انگاشته عرض آن وطول این را از روی معادله خط بدست آوریم .

۱۸٦ — **فصل مشترک دو خط** ـ مختصات فصل مشترک دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ جوابهای دستگاه :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

میباشند یعنی

$$x = \frac{bc'-cb'}{ab'-ba'} \quad \text{و} \quad y = \frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}$$

مجانبها

۱۸۷ — **تعریف** ـ اگر نقطهٔ M بتواند در روی یک منحنی بی نهایت دور شود میگویند این منحنی یک شاخه بی نهایت دارد .

۱۸۸ — **مجانب** ـ هرگاه خطی مانند $\triangle$ بتوان یافت که فاصله نقطه M منحنی از آن ، وقتی که M بی نهایت در

روی منحنی دور شود ، بسمت صفر میل کند ، خط $\triangle$ را مجانب منحنی گویند .

بعبارت دیگر مجانب خطی است که در بی نهایت بر منحنی مماس شود .

مجانب بر سه قسم است : **افقی** یا موازی محور x ها ، **قائم** یا موازی محور y ها ، **مایل** .

۱۸۹ — **مجانب افقی** — هرگاه در تابع $y = f(x)$ وقتی که x بی نهایت بزرگ شود y بسمت مقدار ثابت a میل کند خط $y = a$ را مجانب افقی منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ گویند .

۱۹۰ — **مجانب قائم** — هرگاه در تابع $y = f(x)$ وقتی که y بی نهایت بزرگ شود x بسمت مقدار ثابت b میل کند خط $x = b$ مجانب قائم منحنی است .

۱۹۱ — **مجانب مایل** — اگر خط $y = mx + n$ مجانب مایل منحنی $y = f(x)$ باشد :

m حد $\frac{y}{x}$ است وقتی که x میل کند بسمت بی نهایت

n حد $y - mx$ است وقتی که x میل کند بسمت بی نهایت .

۱۹۲ — **قاعده عملی برای پیدا کردن مجانبها**

۱) منحنیهائیکه معادلهٔ آنها خطی است ، یعنی کسری یا اصم نیست ، مجانب ندارند .

ب) در تابع کسری $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ برای تعیین مجانبها

باینطریق باید عمل کرد :

۱ — مجانب قائم : معادلهٔ آنها ریشه های $\varphi(x) = 0$ است .

۲ — مجانب افقی : معادلهٔ آنها حد کسر $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ است وقتی x میل کند بسوی بی نهایت (شماره ۱۵۶) .

۳ — مجانب مایل : خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $\varphi(x)$ معادلهٔ مجانب مایل است .

تبصره — اگر درجه $\varphi(x)$ از $f(x)$ زیادتر یا با آن مساوی باشد منحنی مجانب مایل ندارد . اگر درجه $f(x)$ از $\varphi(x)$ یکی بیشتر باشد مجانب خطی مستقیم است . هرگاه اختلاف درجات بیش از یکی باشد مجانب منحنی است .

درمعادلات اصم (غیر کسری) مجانب موازی (قائم و افقی) نیست و معادلهٔ مجانب مایل پس از تعیین m حد $\frac{y}{x}$ و n حد $y - mx$ وقتی x میل کند بسوی بی نهایت بدست میآید .

تقعر و تحدب

۱۹۳ — تقعر و تحدب — اگر مماس مرسوم در نقطه M بر منحنی ، منحنی را در همان نقطه قطع نکند میگویند منحنی در این نقطه محدب (یا مقعر) است . بر حسب آنکه منحنی در مجاورت M بالا یا پائین مماس باشد میگویند تقعر منحنی بطرف y های مثبت یا منفی است و بر حسب آنکه براست یا بچپ مماس باشد تقعر منحنی بطرف x های مثبت یا منفی است .

۱۹۴ — نقطهٔ عطف — اگر مماس در M بر منحنی ،

منحنی را درهمان نقطه قطع کند ، منحنی در آن نقطه تغییر جهت تقعر داده است M را نقطهٔ عطف منحنی میگویند .

۱۹۵ ـ **قضیه** ـ مشتق دوم هر تابع بازاء طول نقاطی که تقعر منحنی نمایش آن تابع بطرف y های مثبت است مثبت و بازاء طول نقاطی از منحنی که تقعر آن بطرف y های منفی است منفی میباشد .

نتیجه ـ در نقطه عطف مشتق دوم مساوی صفر است .

تقارن

۱۹۶ ـ **محور تقارن** ـ خط Δ را محور تقارن یك منحنی گویند درصورتیکه اگر خطی برهر نقطه غیر مشخص N از Δ عمود گردد ومنحنی را در M' و M قطع کند ، N وسط MM'' باشد .

مرکز تقارن ـ نقطه (α, β) A را مرکز تقارن منحنی گویند درصورتیکه اگر هرخط غیر مشخص که بر A بگذرد ومنحنی را دردو نقطه M' و M'' قطع کند ، A وسط $M'M''$ باشد .

۱۹۷ ـ **تعیین محور تقارن** ـ برای آنکه بدانیم منحنی نمایش $y = f(x)$ محور تقارن دارد یانه ، و اگر دارد برای بدست آوردن معادله آن ، خط Δ بمعادله $y = mx + n$ را (که درآن باید پارامتر های m و n را مشخص ساخت) فرض میکنیم و نقطه $(m\alpha + n$ و $\alpha)$ A را بر آن اختیار مینمائیم و از آن خط $y - (m\alpha + n) = -\frac{1}{m}(x - \alpha)$ را بر Δ

عمود کرده M' و M'' فصل مشترکهای آنرا با منحنی $y=f(x)$ بدست می آوریم - اگر (x', y') و (x'', y'') مختصات M', M'' باشند و $\triangle$ محور تقارن باشد چنین خواهیم داشت :

$$(1)\quad \frac{x'+x''}{2}=\alpha \qquad\qquad (2)\quad \frac{y'+y''}{2}=m\alpha+n$$

روابط (۱) و (۲) نباید بستگی به α داشته باشند ، پس هرگاه آنها را برحسب α مرتب کنیم باید در هر یک ضریب α و جمله مستقل از α مساوی صفر شوند . باین ترتیب مقادیری برای m و n بدست می آید . اگر مقادیری که از روابط (۱) و (۲) بدست آمده اند با هم مساوی باشند $\triangle$ محور تقارن است ، وگرنه نیست .

۱۹۸ - تعیین مرکز تقارن - برای تعیین آنکه منحنی $y=f(x)$ مرکز تقارن دارد نقطه $M(\alpha, \beta)$ را ، که در آن α و β بعداً تعیین خواهند شد ، اختیار می کنیم و خط $y-\beta=m(x-\alpha)$ را بر آن مرور داده محل برخورد آن را با $y=f(x)$ بدست میآوریم . اگر $A(x', y')$ و $B(x'', y'')$ نقاط تقاطع و M مرکز تقارن باشند :

$$(1)\quad \frac{x'+x''}{2}=\alpha \qquad \text{و} \qquad (2)\quad \frac{y'+y''}{2}=\beta$$

روابط (۱) و (۲) باید از m مستقل باشند پس باید ضرایب قوای مختلفه m در آنها مساوی صفر شوند . از بیان این شرط در رابطه (۱) برای α و β مقادیری بدست می آید ، اگر این

مقادیر ضرایب قوای مختلفه m را در رابطه (۲) نیز صفر کنند. منحنی مرکز تقارن دارد و مقادیری که برای α و β بدست آمده اند مختصات این مرکزند .

۱۹۹ – قضیه – اگر یک منحنی دو محور تقارن عمود برهم داشته باشد محل تقاطع آنها مرکز تقارن منحنی است .

مماس بر منحنی

۲۰۰ – مماس – اگر خطی منحنی $y = f(x)$ را در M' و M'' قطع کند سپس در حول M' آنقدر بچرخد که M'' بی نهایت به M' نزدیک شود حد خط را مماس بر منحنی در نقطه M' گویند .

۲۰۱ – ضریب زاویه‌ای مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه ای بطول a عبارتست از مقدار مشتق $y' = f'(x)$ بازاء $x = a$.

۲۰۲ – رسم مماس بر منحنی $y = f(x)$

۱) معادله مماس بر منحنی که بر نقطهٔ M بطول a واقع بر منحنی می گذرد عبارتست از $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

۲) معادله مماسی که از نقطه $M(\alpha, \beta)$ واقع در خارج منحنی بر منحنی رسم شود بدو قاعده بدست میآید .

قاعدهٔ اول : تعیین ضریب زاویه ای مماس — معادله کلی خطوطی را که بر $M(\alpha, \beta)$ میگذرند مینویسیم : $y - \beta = m(x - \alpha)$ ؛ آنگاه آن را با معادله منحنی $y = f(x)$ حل میکنیم ؛ شرط آنکه خط بر منحنی مماس باشد اینست که

دستگاه یك ریشه مضاعف داشته باشد . مقداری از m که بازاء آنـ ریشه مضاعف بدست میآید ضریب زاویه‌ای مماس است .

قاعدهٔ دوم - تعیین طول نقطه تماس - معادله کلی مماس بر نقطه‌ای از منحنی بمختصات $[a, f(a)]$ را می نویسیم :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

بعد بجای x و y مقادیر α و β را میگذاریم و a یعنی طول نقطه تماس را بدست میآوریم .

رسم منحنی

۲۰۳ - برای رسم منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ باینطریق عمل میکنیم :

۱) ریشه‌های $f(x) = ۰$ را بدست می آوریم. ۲) مقدار y را بازاء $x = \pm\infty$ معین میکنیم .

۳) معادلات مجانبها را تعیین مینمائیم ٤) بوسیله مشتق طول و عرض نقاط ماکزیمم و می نیمم را معلوم میکنیم .

۵) با مشتق درم طول نقطه عطف را معین می کنیم .

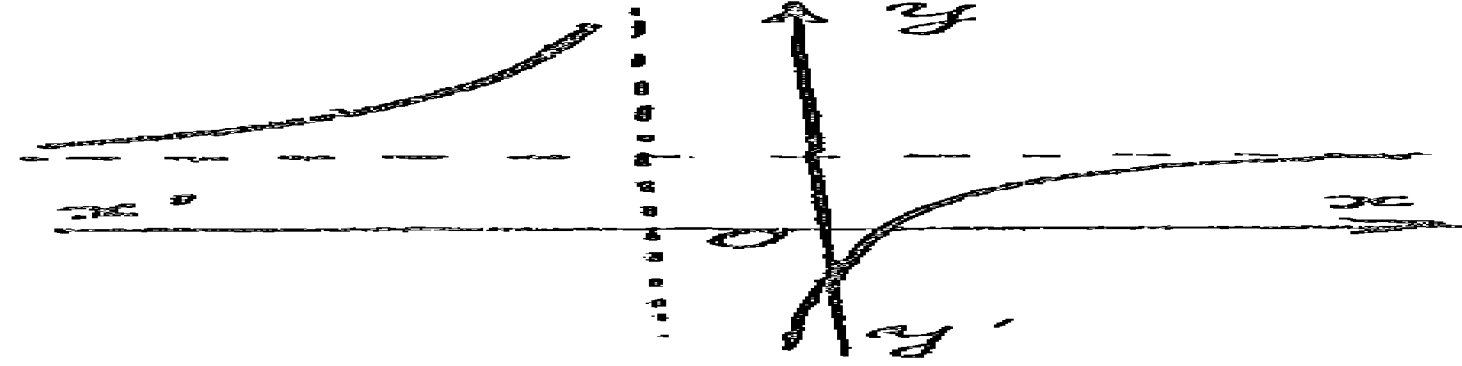
٦) جدول نمایش تغییرات را ترتیب میدهیم . ۷) نسبت بدو محور متعامد نخست مجانبها را میسازیم و بعد بکمك نقاطی که در جدول تغییرات ثبت شده اند و با مراعات جهت تغییرات منحنی را رسم میکنیم . اینك چند مثال :

مثال ۱ - رسم منحنی تابع هموگرافیك $y = \frac{۲x - ۱}{x + ۱}$

$x = ۰$ ، $y = -۱$ $x = \frac{۱}{۲}$ ، $y = ۰$

$x = \infty$ ، $y = ۲$ $\qquad$ $x = -۱$ ، $y = \infty$

$y' = \frac{۳}{(x+۱)^۲}$ همیشه مثبت است

x	$-\infty$		-۱		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$		$+$	
y	۲	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-۱	↗	۰	↗	۲

مثال ۲ − تغییرات تابع $y = \frac{x^۲ - ۵x + ٤}{x^۲ + ۵x + ٤}$

$y' = \frac{۱۰(x^۲ - ٤)}{(x^۲ + ۵x + ٤)^۲} = ۰$ $\left\{\begin{array}{l} x = +۲ \\ y = -\frac{۱}{۹} \end{array}\right.$ و $\left\{\begin{array}{l} x = -۲ \\ y = -۹ \end{array}\right.$

$y = ۰$ $\qquad$ $x = ۱$ و $x = ٤$

$y = \infty$ $\qquad$ $x = -۱$ و $x = -٤$

$x = \infty \qquad y = 1$

$x = 0 \qquad y = 1$

مثال ۳ – مطلوبست رسم منحنی $y = \dfrac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$ وقتی:

$0 < x < 2a$

$$y = \frac{\cos 3x}{1 + \cos 2x} = \frac{4\cos^2 x - 3}{2\cos x}$$

$$y' = \frac{-\sin x\,(\text{٤}\cos^{\text{۲}} x + \text{۳})}{\text{۲}\cos^{\text{۳}} x}$$

$y = \text{۰}\ \cos x = \pm\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}$ $\qquad x = \text{۳۰°، ۱۵۰°، ۲۱۰°، ۳۳۰°}$

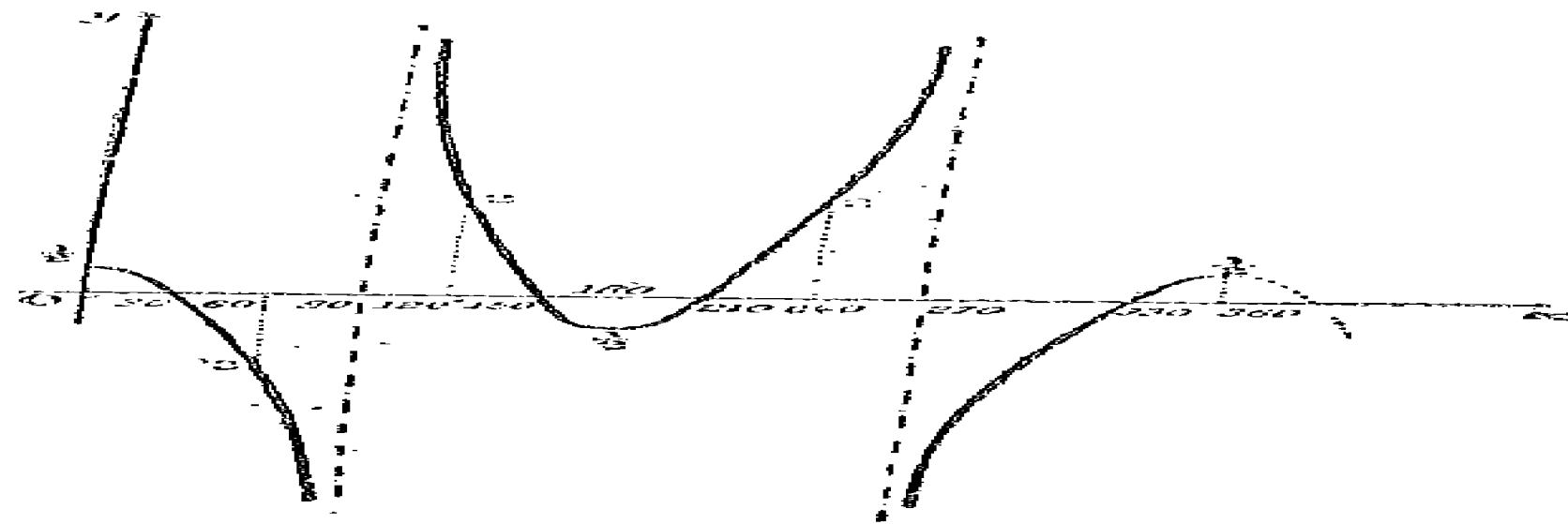
$y = \infty\ \text{،}\ \cos x = \text{۰}$ $\qquad x = \text{۹۰°، ۲۷۰°}$

$x = \text{۰}\ \text{،}\ y = \text{۱}$

$y' = \text{۰}\ \text{،}\sin x = \text{۰} \begin{cases} x = \text{۰} \\ y = \text{۰} \end{cases} \begin{cases} x = \text{۱۸۰} \\ y = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \end{cases}$

$y' > \text{۰}$ $\qquad \text{۱۸۰°} < x < \text{۳۶۰°}$

x	۰	۳۰°		۹۰°	۱۵۰°	۱۸۰°	۲۱۰°	۲۷۰°	۳۳۰°	۳۶۰°
y'	۰		−			۰		+		۰
y	۱ ↘	۰ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘	۰ ↘	$-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ↗	۰ ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ ۰	↗ ۱

حال اگر منحنی تغییرات فوق را رسم کنیم شکل ۱۱ بدست میآید

شکل ۱۱

XXIX حل معادلات بوسیله رسم منحنی

۲۰٤ — حل معادله $f(x) = 0$ — هر گاه جواب‌های معادله $f(x) = 0$ براههائی که در حدود اطلاع ما هستند بدست نیایند میتوان منحنی نمایش تغییرات $y = f(x)$ را با دقت هرچه بیشتر رسم کرد ؛ طول نقاط تلاقی این منحنی با محور x ها جوابهای تقریبی معادله‌اند.

۲۰۵ — حل دستگاه دو معادله دو مجهولی $f(x, y) = 0$ ، $\varphi(x, y) = 0$

در هر یك از معادلات y را برحسب x بدست میآوریم: $y=f_1(x)$ و $y=\varphi(x)$ ؛ آنگاه منحنی دو تابع اخیر را با دقت تمام رسم میکنیم ؛ مختصات نقاط برخورد منحنیها جواب های دستگاه مفروضند.

۲۰۶ — بحث در وجود و علامت ریشه های معادلة پارامتری $f(x,m)=0$.

از رابطة $f(x,m)=0$ پارامتر m را برحسب x بدست میآوریم ؛ $m=f_1(x)$ ، سپس منحنی تغییرات $m=f_1(x)$ را رسم میکنیم (m بجای y فرض میشود) و نیز خط $y=m$ را وقتی m از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند رسم میکنیم ، بر حسب آنکه خط منحنی را قطع نکند یا بکند یا بر آن مماس شود معادله دارای جواب نیست یا هست یا جواب مضاعف دارد.

XXX — حل نامعادلات بوسیله منحنی

۲۰۷ — منحنی نمایش $y=f(x)$ صفحه را بدو ناحیه تقسیم میکنند. مختصات هر نقطه واقع بر منحنی در رابطة $y=f(x)$ صادقند و مختصات هر نقطه غیر واقع بر منحنی در یکی از دو رابطة $y>f(x)$ یا $y<f(x)$ صدق می کنند. مختصات جمیع نقاط واقع در یکی از دو ناحیه صفحه در یکی از دو رابطة اخیر و جمیع نقاط واقع در ناحیه دیگر در رابطة دیگر صادق میباشند.

۲۰۸ — حل نامعادله $f(x, y) \gtrless 0$ — نخست $f(x, y)$ را مساوی صفر انگاشته $y = f_1(x)$ را بوسیله آن بدست میآوریم و منحنی آنرا میکشیم ، آنگاه مختصات یك نقطه M واقع درخارج این منحنی (مبداء مختصات درصورتیکه بر روی منحنی نباشد از هر نقطه دیگر بهتر است) را در رابطه $f(x, y)$ میگذاریم اگر نتیجه مثبت باشد جمیع نقاط واقع در ناحیه‌ایکه شامل نقطه M است در نامعادله صادقند والا نقاط ناحیه دیگر .

۲۰۹ — حل دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} f(x, y) \gtrless 0 \\ g(x, y) \gtrless 0 \\ h(x, y) \gtrless 0 \end{cases}$$

برای هریك از سه رابطهٔ دستگاه ناحیه‌ای از صفحه را که جواب مسئله است نگاه داشته ناحیه دیگر را هاشور میزنیم مختصات نقاط قسمتهائی ازصفحه که پس ازخاتمه کار بی‌هاشور بمانند جوابهای دستگاهند .

XXXI — تابع اولیه — سطح محصور

۲۱۰ — اگر $y = f(x)$ مشتق اول تابع $Y = F(x)$ باشد $F(x)$ را تابع اولیه $f(x)$ میگویند و آنرا چنین نمایش میدهند

$$Y = \int y dx = \int f(x) dx$$

مثال : $\int (x^2 - x + 1)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$

۲۱۱ - هرگاه پس از تعیین تابع اولیه تابع $y = f(x)$ دو مقدار a و b را بجای x قرارداده تفاضل مقادیری را که بدست میآیند تعیین کنیم میگوئیم مقدار تابع اولیه $y = f(x)$ را بین دو حد $x = a$ و $x = b$ بدست آورده‌ایم .

مثال : $\int_2^3 (x^2 - 5x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_2^3$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 5\frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 5\frac{2^2}{2}\right)$$

$$= \left(9 - \frac{45}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} - 10\right) = -\frac{37}{6}$$

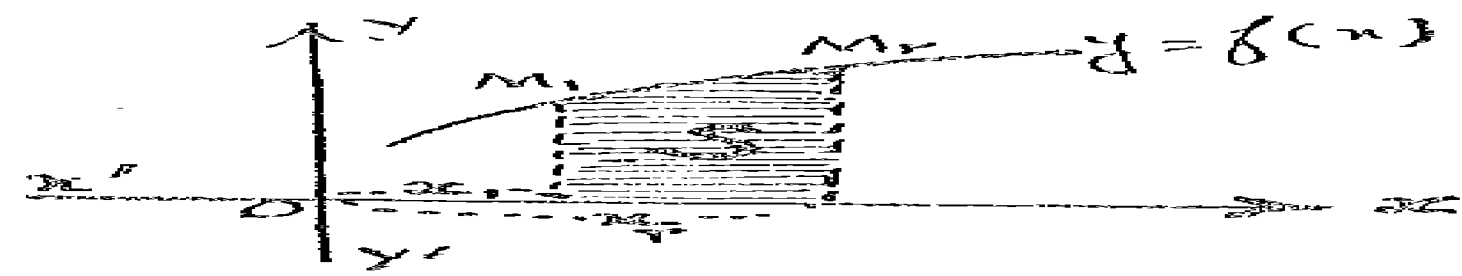
۲۱۲ - قضیه - هرگاه $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد $F(x) + c$ هم تابع اولیه آنست (c عددیست ثابت)

۲۱۳ - توابع اولیهٔ مهم بدینقرارند :

تابع	تابع اولیه
$y = 0$	$Y = c$ (مقدار ثابت)
$y = a$	$Y = ax + c$
$y = ax^m$	$Y = \frac{a}{m+1}x^{m+1} + c$
$y = \frac{a}{\sqrt{x}}$	$Y = 2a\sqrt{x} + c$

$y = \sin x$	$Y = -\cos x + c$
$y = a \sin mx$	$Y = -\frac{a}{m} \cos mx + c$
$y = \cos x$	$Y = \sin x + c$
$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$Y = tg\, x + c$
$y = 1 + tg^2 x$	$Y = tg\, x + c$
$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	$Y = \cot g\, x + c$
$y = 1 + \cot g^2 x$	$Y = -\cot g\, x + c$
$y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$	$Y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x) + c$
$y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	$Y = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin 2x) + c$
$y = tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$	$Y = tg\, x - x + c$

۲۱۴ — قضیه . هرگاه تابع $y = f(x)$ در فاصله x_1 و x_2 اتصالی باشد سطح محصور بین منحنی نمایش $y = f(x)$ و محور x ها و دو عرض ثابت بطول x_1 و x_2 مساوی است با مقدار تابع اولیه $y = f(x)$ بین دو حد x_1 و x_2 یعنی :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

شکل ۱۲

مثال ۱ — سطح محصور بین محور x ها و منحنی
$y = x^2 - 5x + 4$
(ش ۱۳)

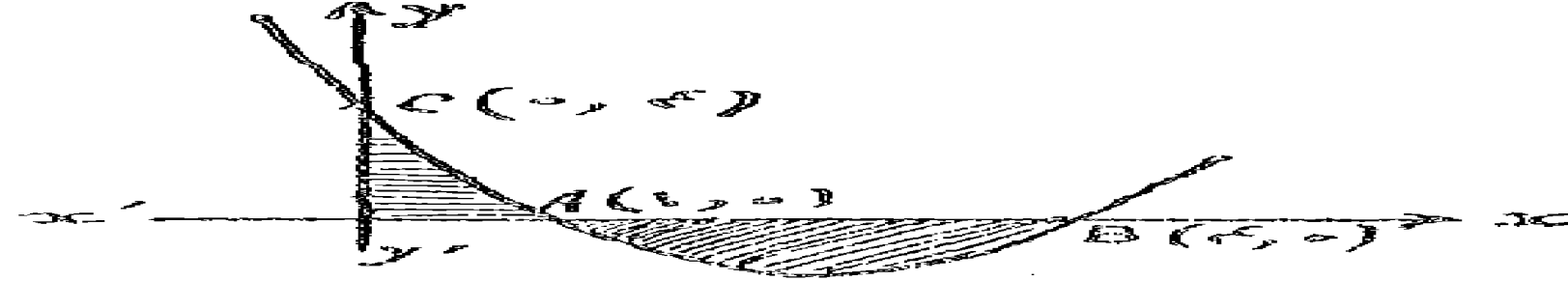
$$S = \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 4x \right]_1^4$$
$= -$ ٤٫٥

y C(0,4) A(1,0) x' y' B(4,0) x

شکل ۱۳

مثال ۲ — سطح بین منحنی مثال ۱، و محور y ها و محور x ها (ش ۱۳)

$$S = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)\,dx = \frac{11}{6}$$

متمم جبر

XXXII معادلات منحنی های مخصوص(۱)

۲۱۵ — معادله دایره — اگر مرکز دایره $M(\alpha, \beta)$ و شعاع آن R باشد:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0$$

۲۱۶ — معادله بیضی — وقتی مرکز و محورهای آن بترتیب بر مرکز و محورهای مختصات منطبق باشند:

(۱) رجوع شود بقسمت مخروطات همین کتاب

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

(a و b نصف محورهای بلند و کوتاه بیضی هستند)

۲۱۷ — معادلهٔ هذلولی — با شرایط شماره ۲۱۶ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

۲۱۸ — معادلهٔ سهمی — وقتی محور آن برمحور x ها و رأس آن برمرکز منطبق باشند و فاصله کانون از خط هادی را p مینمائیم :

$$y^2 = 2px$$

XXXIII حل معادلات دوجمله وسه جمله

۲۱۹ — معادلهٔ دوجمله — معادله دوجملهٔ درجه n ام بصورت $ax^n + bx^p = 0$ میباشد $(p<n)$ برای حل آن x^p را عامل مشترک قرار میدهیم :

$$x^p(ax^{n-p} + b) = 0 .$$

علاوه بر p جواب مساوی ، جواب دیگر معادله عبارتست از :

$$x = \sqrt[n-p]{-\frac{b}{a}}$$

اگر p و n هر دو زوج یا هر دو فرد باشند شرط قابل قبول بودن جواب آنست که a و b مختلف العلامه باشند.

۲۲۰ – **معادلهٔ سه جمله** – این معادله که صورت کلی آن $ax^n + bx^p + cx^q = 0$ است در حالت خاصی که n و p و q جمله های یک تصاعد حسابی باشند بصورت یک معادلهٔ درجهٔ دوم در میآید و قابل حل است. زیرا چون تفاضل $n - p = p - q$ را r فرض کنیم $n - q = 2r$ میشود و چون در سه جمله x^q را عامل مشترک قرار دهیم:

$$x^q (ax^{n-q} + bx^{p-q} + c) = 0$$

یا

$$x^q (ax^{2r} + bx^r + c) = 0$$

x^r را مساوی y فرض مینمائیم، پس

$$x^q (ay^2 + by + c) = 0$$

XXXIV. قاعده بزو برای حل معادلات چند مجهولی درجه اول

۲۲۱ – این قاعده عبارتست از تعمیم قاعده حذف که در حل معادلات دو مجهولی درجهٔ اول ذکر گردیده است (شمارهٔ ٦٥)

فرض کنیم مقصود حل دستگاه درجه اول سه مجهولی

$$(I)\quad \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

اگر دومعادلهٔ آخر این دستگاه را بترتیب در مقادیر اختیاری α و β ضرب وسه معادله را باهم جمع و بر حسب x و y و z مرتب کنیم چنین خواهیم داشت .

$$(a+a'\alpha+a''\beta)x+(b+b'\alpha+b''\beta)y$$
$$+(c+c'\alpha+c''\beta)z+(d+d'\alpha+d''\beta)=0 .$$

بدیهیست که معادلهٔ اخیر جوابهای دستگاه (I) راقبول میکند. حال ماميتوانيم مقادیر اختیاری α و β راطوری انتخاب کنیم که ضرایب y و z درمعادلهٔ اخیر صفر شوند .

برای اینکار باید α و β ریشههای دستگاه

$$\begin{cases} b+b'\alpha+b''\beta=0 \\ c+c'\alpha+c''\beta=0 \end{cases}$$

باشند یعنی

$$\alpha=\frac{b''c-c''b}{b'c''-c'b''}\qquad \beta=\frac{bc'-cb'}{b'c''-c'b''}$$

در اینصورت

$$x=-\frac{d+d'\alpha+d''\beta}{a+a'\alpha+a''\beta}$$

برای بدست آوردن y و z بهمین نحو ضرایب دومجهول دیگر را مساوی صفر قرار میدهیم .

xxxv معادلات مجهول القوی و لگاریتمی

۲۲۲ ــ تعریف ــ معادلهٔ مجهول القوی آنست که در آن مجهول بصورت نمایندهٔ عدد معلومی درآمده باشد. معادله لگاریتمی آنست که در آن لگاریتم عددهای مجهول و خود آنها وجود داشته باشد.

با چند مثال نوعهای مختلف اینگونه معادلات و راه حلهای آنها را نشان میدهیم. (در مثالها حروف معلوم همه مثبت فرض میشوند)

مثال ۱ ــ $a^x = b$

$x \log a = \log b \qquad x = \frac{\log a}{\log b}$

مثال ۲

$$a^{m^{n^x}} = b$$

فرض میکنیم $y = n^x$ و $z = m^y$ باشند. پس $a^z = b$

یعنی $x = \log\left[\frac{\log\left(\frac{\log b}{\log a}\right)}{\log m}\right] \times \frac{1}{\log n}$

مثال ۳ $a a^{2x} + b a^x + c = 0$

فرض میکنیم $y = a^x$ باشد، پس $x = \frac{\log y}{\log a}$

و y ریشه معادله $ay^2 + by + c = 0$ است.

مثال ۴
$$\begin{cases} \log x + \log y = m \\ ax + by = c \end{cases}$$

این دستگاه تبدیل میشود بدستگاه
$$\begin{cases} xy = 10^m \\ ax + by = c \end{cases}$$

مثال ۵
$$(I) \quad \begin{cases} x^y = y^x \\ x^a = y^b \end{cases}$$

دستگاه (I) تبدیل میشود بدستگاه :
$$(II) \quad \begin{cases} y \log x = x \log y \\ a \log x = b \log y \end{cases}$$

که پس از تقسیم عضو بعضو بصورت $\frac{a}{b} x = y$ درمیآید و اگر فرض کنیم $a = hb$ باشد مقادیر x عبارتند از جوابهای معادلهٔ
$$x^b \left(x^{(a-b)} - \left(\frac{a}{b}\right)^b \right) = 0$$

مثال ۶ معادلهٔ $A^{(ax^2+bx+c)} = B$
منجر میشود بمعادلهٔ $ax^2 + bx + c - \frac{\log B}{\log A} = 0$

XXXVI. تجزیه رادیکالهای مرکب

۲۲۳ — مقصود از این عمل تجزیه عبارت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

است بصورت مجموع یا تفاضل دو رادیکال .

قضیه ـ اگر $A + \sqrt{B} = A' + \sqrt{B'}$ باشد (B و B' مجذور کامل نیستند) $A = A'$ و $B = B'$ میباشد .

حال برای تجزیه $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ آنرا مساوی $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ فرض نموده x و y را حساب میکنیم :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm ۲\sqrt{xy}$$

پس :

$$\begin{cases} x + y = A \\ xy = \frac{B}{۴} \end{cases}$$

x و y ریشه های معادلهٔ $x^۲ - Ax + \frac{B}{۴} = ۰$ میباشند :

$$x = \frac{A + \sqrt{A^۲ - B}}{۲} \quad , \quad y = \frac{A - \sqrt{A^۲ - B}}{۲}$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^۲ - B}}{۲}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^۲ - B}}{۲}}$$

بدیهیست که برای مرکب نبودن طرف دوم باید $A^۲ - B$ مجذور کامل باشد .

XXXVII حل معادله درجه سوم

۲۲۴ ـ نخست میگوئیم هر معادلهٔ کامل درجه سوم را

و حاصل ضرب نشان $q^2 + \frac{4p^3}{27}$ میباشد.

پس هرگاه $27q^2 + 4p^3 < 0$ معادله سه جواب دارد

و « « $27q^2 + 4p^3 = 0$ « « دو « (یکی مضاعف)

و « « $27q^2 + 4p^3 > 0$ « « یك «

۲۲۶ - حل معادله $x^3 + px + q = 0$ از راه مثلثاتی

یادآوری میکنیم که $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$

یا $\cos^3\varphi - \frac{3}{4}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi = 0$ (۱)

اکنون در رابطه $x^3 + px + q = 0$ بجای x مقدار $y\cos\varphi$ را قرار میدهیم تا رابطه

$$\cos^3\varphi + \frac{p}{y^2}\cos\varphi + \frac{q}{y^3} = 0 \quad (۲)$$

بدست آید. اگر $\frac{p}{y^2} = -\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}\cos 3\varphi = -\frac{q}{y^3}$ فرض شوند یعنی $y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ و $\cos 3\varphi = -\frac{q\sqrt{27}}{2\sqrt{-p^3}}$ باشند معادله (۲) تبدیل بمعادله (۱) میشود.

ازروی مقدار $\cos 3\varphi$ نخست سه زاویه 3φ و $3\varphi + 2\pi$

و $3\varphi + 2\pi$ ، $2\pi - 3\varphi$ را یافته $\frac{1}{3}$ آنهارا در مقدار $2\sqrt{\frac{p}{3}}$ ضرب می کنیم تا سه جواب معادله $x^3 + px + q = 0$ بدست آیند. بدیهیست که شرط وجود جواب منفی بودن $27q^2 + 4p^3$ میباشد.

مثال عددی — $x^3 - 4x - 1{,}53958 = 0$

$$r = 2\sqrt{\frac{p}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2{,}3094$$

$$\cos 3\varphi = \frac{q\sqrt{27}}{2\sqrt{p^3}} = \frac{1{,}53958 \times \sqrt{27}}{16} = 0{,}5000$$

پس :

$3\varphi = 60^\circ$ $\varphi_1 = 20^\circ$

$2\pi + 3\varphi = 420^\circ$ $\varphi_2 = 140^\circ$

$2\pi - 3\varphi = 300^\circ$ $\varphi_3 = 100^\circ$

یعنی $\cos \varphi_1 = 0{,}9396$

$\cos \varphi_2 = -0{,}7660$ $\cos \varphi_3 = -0{,}1736$

و بالاخره

$x_1 = 2{,}1698$

$x_2 = -1{,}7689$

$x_3 = -0{,}4009$

پایان

مثلثات

I کلیات

۱ — موضوع – هر مثلث دارای شش جزء (سه ضلع وسه زاویه) است که اگر سه تای آنها را بوضع مناسبی (رجوع شود بهندسه) داشته باشیم میتوانیم سه جزء دیگر را بدست آوریم.

در مثلثات قواعدی گفته میشوند که بکمک آنها از روی اجزاء معلوم اجزاء مثلث را میتوان حساب کرد.

۲ — اندازه قوس – برای اندازه گرفتن قوس دایره (یا زاویه مرکزی مقابل آن) سه واحد بکار میرود:

۱) درجه $= \frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره $= \frac{۱}{۹۰}$ زاویه قائمه.

اجزاء آن: دقیقه $= \frac{۱}{۶۰}$ درجه

ثانیه $= \frac{۱}{۶۰}$ دقیقه $= \frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه

۲) گراد = $\frac{1}{400}$ محیط دایره = $\frac{1}{100}$ زاویه قائمه.

اجزاء آن: دسی‌گراد = $\frac{1}{10}$، سانتی گراد = $\frac{1}{100}$، میلی گراد = $\frac{1}{1000}$ گراد

۳) رادیان – و آن قوسی است از دایره که طولش مساوی شعاع دایره باشد. پس محیط دایره برابر است با 2π رادیان.

۳ – رابطه بین درجه، گراد و رادیان

اگر اندازه قوس AB مساوی D درجه و G گراد و R رادیان باشد:

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi}$$

۴ – دائره مثلثاتی – دائره‌ایست که شعاع آن مساوی واحد باشد.

۵ – دائره جهت‌دار – دائره را که جهت مثبت یا منفی آن تعیین شده باشد دائره جهت‌دار میگویند.

اگر متحرکی از نقطه A واقع بر روی محیط دائره حرکت کند تا بنقطه B برسد گوئیم قوس AB را طی نموده است. A را مبداء و B را منتهای قوس گویند. متحرک

متحرک پس از حرکت از نقطه A یک یا چنددور محیط دائره را طی کند و در B متوقف شود در این صورت هم متحرک قوس AB را طی کرده است. اگر طول کوچکترین قوس AB مساوی α رادیان باشد:

$$ق\ AB = ۲K\pi + \alpha$$

(K عددی است صحیح مثبت یا صفر یا منفی)

۶ — قضیه شال - اگر نقاط A و B و C و ... و F بر روی محیط دائره واقع باشند:

$$ق\ AB + ق\ BC + ق\ CD + ...ق\ DF + ق\ FA = ۲K\pi$$

اگر نقطه M واقع بر محیط دائره مبداء قوسها، a و b طول های قوسهای MA و MB و نقطه C وسط AB باشد.

$$ق\ MC = ۲K\pi + \frac{a + b}{۲}$$

۷ - تعریف - دو قوس را که دارای مبداء مشترک باشند قرینه گویند وقتیکه منتهای آن دو نسبت بمحوری که از مبداء مشترک میگذرد قرینه باشند.

مجموع دو قوس قرینه مساوی است با ۲K .

۸ - تعریف - دو قوس را متمم گویند وقتیکه مجموع آنها مساوی ربع دائره یا $\frac{\pi}{۲}$ باشد.

۹ - تعریف - دو قوس را مکمل گویند وقتی که

مجموعشان مساوی نصف محیط دایره یا π باشد .

۱۱ خطوط مثلثاتی

۱۰ – تعریف — اگر در دایره مثلثاتی قوس $AM = a$ داده شده باشد و AA' قطر مار بر مبداء A و BB' قطر عمود بر آن را رسم کنیم و عمود های Mp و MQ را بر آن دو قطر فرود آوریم و امتداد شعاع OM مماس در نقطه A را در T و مماس در نقطه B را در T' قطع نماید و مماسی که از M بر دایره رسم شود قطر AA' را در U و BB' را در V تلاقی کند :

۱) MP را جیب یا سینوس (Sinus) a علامت اختصاری $\sin a$

۲) OP را جیب تمام یا کسینوس (Cosinus) a علامت اختصاری $\cos a$

۳) AT را ظل یا تانژانت (Tangente) a علامت اختصاری $tg\, a$

۴) BT' را ظل تمام یا کتانژانت (Cotangente) a علامت اختصاری $Cotg\, a$

۵) OU را قاطع یا سکانت a (Secante) علامت اختصاری sec a

٦) OV را قاطع تمام یا کوسکانت a (cosecante) علامت اختصاری cosec a

مینامند . وهرشش خط را خطوط مثلثاتی قوس a میگویند .

۱۱ – قضیه – وقتی قوس a از ۰ تا ۳٦۰ درجه تغییر نماید :

جیب وجیب تمام آن بین ۱ – و ۱+ ، وظل وظل تمام وقاطع وقاطع تمام آن بین ∞– و ∞+ تغییر مینمایند

۱۲ – روابط بین خطوط مثلثاتی قوس a –

(۱) $\sin^{۲} a + \cos^{۲} a = ۱$

(۲) $tg a = \frac{\sin a}{\cos a}$

(۳) $cotg a = \frac{\cos a}{\sin a}$

(٤) $\sec a = \frac{۱}{\cos a}$

(۵) $cosec a = \frac{۱}{\sin a}$

روابطی که از روابط فوق نتیجه میشوند .

$$\sin a = \frac{tg a}{\pm\sqrt{۱ + tg^{۲} a}}$$

$$\cos a = \frac{۱}{\pm\sqrt{۱ + tg^{۲} a}}$$

$$۱ + tg^{۲} a = \frac{۱}{\cos^{۲} a}$$

$$۱ + cotg^{۲} a = \frac{۱}{\sin^{۲} a}$$

۱۳ — روابط بین خطوط مثلثاتی قوسهائیکه تفاضل یا مجموعشان مضربی از π باشد . (k عددی است بزرگتر یا کوچکتر از صفر یا مساوی آن)

۱ — اگر $a - b = 2k\pi$ (تفاضل دو قوس مضرب زوج π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin(2k\pi + b) = \sin b \\ \cos a = \cos(2k\pi + b) = \cos b \\ tg\, a = tg(2k\pi + b) = tg\, b \end{cases}$$

۲ — اگر $a + b = 2k\pi$ (مجموع دو قوس مضرب زوج π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin(2k\pi - b) = -\sin b \\ \cos a = \cos(2k\pi - b) = \cos b \\ tg\, a = tg(2k\pi - b) = -tg\, b \end{cases}$$

۳ — اگر $a - b = (2k+1)\pi$ (تفاضل مضرب فرد π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin[(2k+1)\pi + b] = -\sin b \\ \cos a = \cos[(2k+1)\pi + b] = -\cos b \\ tg\, a = tg[(2k+1)\pi + b] = tg\, b \end{cases}$$

۴ — اگر $a + b = (2k+1)\pi$ (مجموع مضرب فرد π) باشد :

$$\begin{cases} \sin a = \sin[(2k+1)\pi - b] = \sin b \\ \cos a = \cos[(2k+1)\pi - b] = -\cos b \\ tg\, a = tg[(2k+1)\pi - b] = -tg\, b \end{cases}$$

۱۴ – در قوسهای متمم ، یعنی اگر $a+b=\frac{\pi}{2}$ باشد :

$$\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos b$$

$$\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b$$

$$tg a = tg\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = cotg\, b$$

اگر تفاضل دو قوس یک قائمه باشد $a-b=\frac{\pi}{2}$

$$\sin a = \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \cos b$$

$$\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\sin b$$

$$tg a = tg\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -cotg\, b$$

۱۵ – روابط بین قوسهائی که یک خط مثلثاتی داشته باشند .

۱ – اگر $\sin a = \sin b$: $\begin{cases} a = 2k\pi + b \\ a + (2k+1)\pi - b \end{cases}$

۲ – اگر $\cos a = \cos b$: $\begin{cases} a = 2k\pi + b \\ a = 2k\pi - b \end{cases}$

۳ – اگر $tg a = tg b$: $a = k\pi + b$

۱۶ - جدول مثلثاتی برخی قوسهای مهم :

قوس	sin	cos	tg	cotg
۰	۰	۱	۰	∞
$\frac{\pi}{6}$ = ۳۰°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$ = ۴۵°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
$\frac{\pi}{3}$ = ۶۰°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$ = ۹۰°	۱	۰	∞	۰

۱۷ - دوره تناوب خطوط مثلثاتی

خطوط مثلثاتی توابع متناوب (جبر ، شماره ۱۵۲) قوس هستند ، دورهٔ تناوب جیب و جیب تمام و قطر ظل و قطر ظل تمام 2π و دوره تناوب ظل و ظل تمام π میباشد .

III — جمع و تفریق و ضرب و تقسیم قوسها

۱۸ - تصویر بر محور - هرگاه a طول قطعه خط AB و α زاویهٔ آن با جهت مثبت محور و a' تصویر آن بر محور باشد :

$$a' = a\cos a$$

۱۹ – خطوط مثلثاتی مجموع یا تفاضل دو قوس

۱ – مجموع: $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\,tg\,b}$$

ب – تفاضل: $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$tg(a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a\,tg\,b}$$

۲۰ – مجموع سه قوس:

$$\sin(a+b+c) = \sin[(a+b)+c] =$$
$$\sin a\cos b\cos c + \sin b\cos a\cos c + \sin c\cos a\cos b$$
$$- \sin a\sin b\sin c$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a\cos b\cos c - \cos a\sin b\sin c$$
$$- \cos b\sin a\sin c - \cos c\sin a\sin b$$

$$tg(a+b+c) = \frac{tg\,a + tg\,b + tg\,c - tg\,a\,tg\,b\,tg\,c}{1 - tg\,a\,tg\,b - tg\,b\,tg\,c - tg\,a\,tg\,c}$$

۲۱ – خطوط مثلثاتی قوسهائی که مضرب یک قوس هستند:

۱ – قوسهای دو برابر:

$$\begin{cases} \sin 2a = 2\sin a\cos a \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\ tg\, 2a = \dfrac{2\, tg\, a}{1 - tg^2 a} \end{cases}$$

۲ – قوسهای سه برابر:

$$\begin{cases} \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \\ tg\, 3a = \dfrac{3\, tg\, a - tg^3 a}{1 - 3\, tg^2 a} \end{cases}$$

۳ – قوسهای پنج برابر:

$$\begin{cases} \sin 5a = 5\sin a - 20\sin^3 a + 16\sin^5 a \\ \cos 5a = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a \end{cases}$$

۲۲ – خطوط مثلثاتی یک قوس برحسب ظل نصف آن

$$\sin a = \frac{2\, tg\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1 - tg^2\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}}, \quad tg\, a = \frac{2\, tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}$$

۲۳ – خطوط مثلثاتی یک قوس برحسب جیب دو برابر آن

$$\sin a = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1 + \sin 2a} \pm \sqrt{1 - \sin 2a}\right)$$

$$\cos a = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1 + \sin 2a} \pm \sqrt{1 - \sin 2a}\right)$$

۲۴ ـ خطوط مثلثاتی یك قوس بر حسب جیب تمام دو برابر آن

$$\sin a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}$$

$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$$

۲۵ ـ محاسبه $tg\, a$ بر حسب $tg\, 2a$

$$tg\, a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + tg^2\, 2a}}{tg\, 2a}$$

۱۷ ـ لگاریتمی کردن

۲۶ ـ در جبر دیده‌ایم که لگاریتم حاصلضرب (یا خارج قسمت) چند مقدار برابر است با مجموع (یا تفاضل) لگاریتم های آنها.

چون در جداول لگاریتم بجای خطوط مثلثاتی قوسهای مختلف لگاریتمهای آن خطوط را داده‌اند اغلب محتاج باستفاده از لگاریتم خطوط بجای خود آنها هستیم. بنا بر این باید سعی کنیم تا هر جا که ممکنست بجای مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی حاصلضرب یا خارج قسمت آنها را بدست آوریم.

این عمل، یعنی تبدیل مجموع یا تفاضل خطوط مثلثاتی به حاصلضرب یا خارج قسمت، را لگاریتمی کردن یا قابل محاسبه کردن آنها میگویند.

۲۷ ـ تبدیل مجموع یا تفاضل دو خط مثلثاتی بحاصلضرب:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2} \qquad (1)$$

٢) $\cos p + \cos q = ٢\cos\frac{p+q}{٢}\cos\frac{p-q}{٢}$

٣) $\sin p - \sin q = ٢\sin\frac{p-q}{٢}\cos\frac{p+q}{٢}$

٤) $\cos p - \cos q = -٢\sin\frac{p+q}{٢}\sin\frac{p-q}{٢}$

٥) $tg\,p + tg\,q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

٦) $tg\,۶ - tg\,q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$ [sic]

٧) $\cos p - \sin q = ٢\sin\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{p+q}{٢}\right)\cos\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{p-q}{٢}\right)$

٨) $\sin p + \cos q = ٢\sin\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{p-q}{٢}\right)\cos\left(\frac{p+q}{٢} - \frac{\pi}{٤}\right)$

٩) $١ + \sin a = ٢\sin^{٢}\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{a}{٢}\right) = ٢\cos^{٢}\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{a}{٢}\right)$

١٠) $١ - \sin a = ٢\sin^{٢}\left(\frac{\pi}{٤} - \frac{a}{٢}\right) = ٢\cos^{٢}\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{a}{٢}\right)$

١١) $١ + \cos a = ٢\cos^{٢}\frac{a}{٢}$

١٢) $١ - \cos a = ٢\sin^{٢}\frac{a}{٢}$

٢٨ - تبديل حاصلضرب دو خط مثلثاتی بمجموع يا تفاضل :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

۲۹ — تبدیل برخی عبارات مثلثاتی بحاصلضرب

۱) برای تبدیل عبارت $a\cos x + b\sin x$ فرض میکنیم $\frac{b}{a} = tg\varphi$ باشد

پس $a\cos x + b\sin x = a(\cos x + \frac{b}{a}\sin x)$

$$= a(\cos x + tg\varphi \sin x) = \frac{a}{\cos\varphi}\cos(\varphi - x)$$

۲) برای تبدیل عبارت $a+b$ فرض میکنیم $\frac{a}{b} = tg^2\varphi$ باشد؛ پس

$$a + b = a(1 + \frac{b}{a}) = a(1 + tg^2\varphi) = \frac{a}{\cos^2\varphi}$$

۳) برای تبدیل $a - b$ فرض میکنیم $\frac{b}{a} = \sin^2\varphi$ باشد:

پس $a - b = a(1 - \sin^2\varphi) = a\cos^2\varphi$

٤) برای تبدیل $\frac{a-b}{a+b}$ فرض میکنیم $tg\varphi = \frac{b}{a}$ باشد :

پس $\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-tg\varphi}{1+tg\varphi} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$

٥) برای تبدیل $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ فرض میکنیم $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ باشد :

پس $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = tg\frac{\varphi}{2}$

٦) حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ از راه مثلثات :
اگر فرض کنیم $x = tg\varphi$ ، معادله باینصورت در میآید
$(c-a)\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi + c + a = 0$
برای حل این معادله و تعیین φ مراجعه شود بحل معادلات مثلثاتی (شماره ۳٤)

۷ روابط بین اجزاء مثلث

۳۰ — در مثلث قائم

۱) $A = \frac{\pi}{2}$ $\quad B + C = \frac{\pi}{2}$

۲) $b = a\sin B = a\cos C = c\,tg B = a\cot g C$

۳) $c = a\sin C = a\cos B = b\,tg C = b\cot g B$

٤) $a^2 = b^2 + c^2$

٥) $tg\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ $\quad$ ٦) $tg\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$

۹۳ – در مثلث غیر مشخص

(R شعاع دایرهٔ محیطی)

۱) $A + B + C = 2\pi$

۲) (دستگاه I) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

۳) دستگاه II
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$$

۴) دستگاه III
$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = a\cos C + c\cos A \\ c = b\cos A + a\cos B \end{cases}$$

۹۴ – روابط بین اضلاع و زوایای مثلث با اشعه دوایر محیطی و محاطی

(R شعاع دایره محیطی ، r شعاع دایره محاطی ، r_a ، r_b و r_c اشعه دوایر محاطی خارج ، a و b و c اضلاع ، p محیط)

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

$$r = (p-a)\,tg\frac{A}{2} = (p-b)\,tg\frac{B}{2} = (p-c)\,tg\frac{C}{2}$$

۳۳ — مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{r\,r_a\,r_b\,r_c} \qquad S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin A\sin C}{\sin B}$$

$$= \frac{1}{2}c^2\frac{\sin A\sin B}{\sin C}$$

۳۴) ارتفاعات مثلث

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= b\sin C = c\sin B = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{\cdots} = a\sin C = c\sin A = \frac{b\sin A\sin C}{\sin B}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{\cdots} = a\sin B = b\sin A = \frac{c\sin A\sin B}{\sin C}$$

۳۵ — منصف زاویه‌ها. اگر l_a و l_b و l_c منصف زاویه‌های داخلی A و B و C و λ_a و λ_b و λ_c منصف زاویه های خارجی آنها باشند :

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} = \frac{b\sin C}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{c\sin B}{\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$l_b = \ldots \qquad l_c = \ldots$$

$$\lambda_a = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} = \frac{b\sin C}{\sin\frac{B-C}{2}} = \frac{c\sin B}{\sin\frac{B-C}{2}} = \frac{a\sin B\sin C}{\sin A\sin\frac{B-C}{2}}$$

$$\lambda_b = \ldots \qquad \lambda_c = \ldots$$

۳۶ — میانه‌ها

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+a^2)-c^2}$$

۳۷ — روابط بین اجزاء مثلثی

۱) $h_a = l_a \cos\frac{B-C}{2} = z_a \sin\frac{B-C}{2}$

۲) $h_b = l_b \cos\frac{C-A}{2} = z_b \sin\frac{C-A}{2}$

۳) $h_c = l_c \cos\frac{A-B}{2} = z_c \sin\frac{A-B}{2}$

٤) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$

٥) $4R = r_a + r_b + r_c - r$

٦) $16R^2 = r^2 + r_b^2 + r_a^2 + r_c^2 + a^2 + b^2 + c^2$

۷) اگر O مرکز دایره محیطی و I مرکز دایره محاطی و H محل تلاقی ارتفاعات باشد ،

$$OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$$
$$OI = R(R - 2r)$$

۸) $abc = 4prR$.

VI معادلات مثلثاتی

۳۸ — معادلهٔ مثلثاتی بیان تساوی بین دو عبارتست که هریک شامل یک خط یا چندخط مثلثاتی یک یا چندقوس باشند

و تساوی آنها بازاء برخی ازمقادیر این قوسها محقق گردد.
این مقادیر را جواب های معادلهٔ مثلثاتی گویند .

۳۹ - معادلهٔ یك مجهولی آنست که فقط یك قوس یا مضارب آن درآن مجهول باشند . اگرمقدار قوسهای مجهول از یك تجاوز کند معادله چند مجهولی خواهد بود .

۱ - معادله یك مجهولی - بردو نوع است :

۴۰ - نوع اول - معادله ای که فقط شامل یك خط مثلثاتی قوس مجهول باشد : برای حل آن باید همان خط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد ومعادله را بطریق جبری حل نمود . پس از بدست آمدن مقدار مجهول قوسهای متناظر با آن خط مثلثاتی جوابهای مسئله اند .

مثلا در معادله $2\cos x - 1 = 0$ پس از حل $\cos x = \frac{1}{2}$
میشود. پس $\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$ و در نتیجه $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۴۱ - نوع دوم - معادله ای که شامل چندین خط مثلثاتی قوس مجهول باشد :

برای حل آن باید یکی ازخطوط مثلثاتی را مجهول معاون قرار داد وسایر خطوط مثلثاتی را بآن خط تبدیل و مطابق حالت اول عمل نمود .

درمعادلات نوع دوم برای انتخاب مجهول معاون از قاعده بیوش میتوان استفاده نمود :

۴۲ - قاعده بیوش Bioche - ۱ - اگردرمعادلهای

قوس x را به $(-x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\cos x$ را مجهول معاون میگیریم .

۲ - اگر درمعادله قوس x را به $(\pi - x)$ تبدیل کنیم و معادله تغییر نکند $\sin x$ را مجهول معاون قرارمیدهیم .

۳ - هرگاه در معادله قوس x را به $(x + \pi)$ تبدیل کنیم ومعادله تغییر نکند $\operatorname{tg} x$ را مجهول معاون قرار میدهیم .

٤ - اگر x را به $(-x)$ و $(\pi - x)$ و $(\pi + x)$ تبدیل کردیم و در هر سه حال معادله تغییر کرد ، باید $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ را مجهول معاون قرارداد .

٤٣ - حل معادلات کلاسیک - غیر ازطریقه مذکور اغلب ممکن است معادلات مثلثاتی را بکمك دستورات مثلثاتی براهمهائی که آسانتر باشد حل نمود . برای نمونه طریقه حل معادلات معروف بکلاسیك را بیان میکنیم .

I) - حل معادلة کلاسیك $a\sin x + b\cos x = c \quad (1)$

حل ۱ - اگر a و b و c عددی باشند $\frac{b}{a}$ را $\operatorname{tg}\varphi$ فرض میکنیم تامعادله باینصورت درآید .

$$\sin x + \operatorname{tg}\varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x \cos\varphi + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

چون طرف دوم مقدار بست معلوم $\varphi + x$ و درنتیجه x بدست می‌آید .

بحث - شرط وجود جواب این است که $1 \geq \frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi$ باشد : یا چون بجای $\cos^2\varphi$ مقدار آن را بر حسب b و a قرار دهیم :

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

حل ۳ - اگر a و b و c پارامتری باشند $tg\frac{x}{2}$ را مجهول معاون انتخاب میکنیم تا معادلهٔ (۱) بصورت معادلهٔ درجه‌دوم

$$(b + c)\, tg^2\frac{x}{2} - 2a\, tg\frac{x}{2} + c - b = 0$$

درآید که در آن شرط وجودجواب ، مثبت یامساوی صفر بودن مبین است ، یعنی

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

II) حل معادلهٔ کلاسیک $a\,tg x + b\cot g x = c$

حل ۱ - اگر ضرائب a و b و c عددی باشند معادلهٔ مفروض را چنین مینویسیم :

$$a\frac{\sin x}{\cos x} + b\frac{\cos x}{\sin x} = c$$

و یا $a\sin^2 x + b\cos^2 x - c\sin x\cos x = 0$

و یا $a \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - c \cdot \frac{\sin 2x}{2} = 0$

یعنی $c\sin 2x + (a - b)\cos 2x = a + b$

که مانند مسئله ۱ حل میشود.

حل ۲ — اگر لااقل یکی از ضرایب پارامتری باشند $tg\,x$ را مجهول معاون میگیریم و معادله باینصورت درمیآید:

$$a\,tg^2x - c\,tg\,x + b = 0$$

۱۶ حل معادله کلاسیک

$$a\sin^2x + b\sin x\cos x + c\cos^2x = d$$

حل ۱ - اگر ضرائب عددی باشند معادله را میتوان باینصورت نوشت:

$$b\sin 2x + (c - a)\cos 2x = 2d - a - c$$

حل ۲ - اگر لااقل یکی از ضرایب پارامتری باشند طرف دوم معادله را در $\sin^2x + \cos^2x$ ضرب و طرفین معادله حاصل را بر $\cos^2x$ تقسیم مینمائیم تا معادله

$$a\,tg^2x + b\,tg\,x + c = d(1 + tg^2x)$$

و یا

$$(a - d)\,tg^2x + b\,tg\,x + c - d = 0$$

حاصل شود که بآسانی میتوان آنرا حل و بحث نمود.

۱۷ حل معادله کلاسیک $\sin px = \sin qx$

حل ـ اگر p و q عددی باشند.

$$\begin{cases} px = 2k\pi + qx \\ px = (2k+1)\pi - qx \end{cases}$$

یعنی $x = \dfrac{2k\pi}{p-q}$ یا $x = \dfrac{(2k+1)\pi}{p+q}$

ب — معادلات چند مجهولی

۴۴ — بدیهیست که بتعداد مجهولها باید معادله داده شده باشد. پس چند معادلات چند مجهولی خواهیم داشت.

برای حل دستگاههای معادلات چند مجهولی مثلثاتی قاعده معینی نمیتوان گفت جز اینکه اصولاً معادلات چند مجهولی با استفاده از قواعد جبری و راه حلهائی که برای حل معادلات یك مجهولی و انتخاب مجهول معاون گفته شده است حل میشوند.

۴۵ — هرگاه در دستگاه علاوه بر خطوط مثلثاتی خود قوسها هم وجود داشته باشند اشکال زیادتر است. تنها در دستگاههای دو مجهولی که مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع، تفاضل، حاصلضرب یا خارج قسمت دو خط داده شده باشند با کمك دستورهای شمارهٔ ۲۷ و ۲۸ میتوان مسائل را بآسانی حل کرد. اینك چند نمونه:

۱) دستگاههائی که در آن مجموع یا تفاضل دو قوس و مجموع یا تفاضل دو جیب یا دو جیب تمام داده شده باشند:

مثال

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

از رابطهٔ

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{x-y}{2} = s$$

تفاضل $x - y$ را و از روی مجموع و تفاضل دو مجهول خود آنها را بدست میآوریم .

II) دستگاههائی که مجموع و تفاضل دو خط مثلثاتی را شامل باشند :

مثال

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

هر معادلهٔ دستگاه را جداگانه لگاریتمی کرده و دو حاصل را بهم تقسیم میکنیم نتیجه میشود :

$$tg\frac{x+y}{2} = \frac{b}{a}$$

و از روی آن $y + x$ بدست میاید . آنگاه مقدار $\frac{x+y}{2}$ را در یکی از معادلات لگاریتمی شده دستگاه برده $x - y$ را بدست میآوریم .

III) مجموع یا تفاضل دو قوس و حاصلضرب دو جیب یا در جیب تمام در دست هستند :

مثال

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x \sin y = p \end{cases}$$

معادلهٔ دوم را بحاصلجمع و تفاضل قوسها تبدیل کرده از روی آن $y - x$ را بدست میآوریم .

IV – علاوه برمجموع یا تفاضل دوقوس خارج قسمت دو درخط از یکنوع دردست هستند :

مثال .

$$\begin{cases} x + y = a \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = q \end{cases}$$

معادلهٔ دوم را ترکیب وتفصیل نسبت میکنیم :

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = tg\frac{a}{2}\,cotg\frac{x-y}{2} = \frac{q+1}{q-1}$$

پس $y - x$ بدست میآید .

V — اگر علاوه برمجموع یا تفاضل دوقوس مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب یا خارج قسمت دو خطل یا دوخطل تمام آنها داده شده باشند مسئله با مختصر تصرفی مانند نمونه‌های I تا IV قابل حل میشود .

مثال

$$\begin{cases} x + y = a \\ tg\,x + tg\,y = s \end{cases}$$

$$tg\,x + tg\,y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} =$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x+y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\right]} = \frac{2\sin a}{\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{x-y}{2}}$$

از [illegible] میتوان x را بدست آورد.

VII نامعادلات مثلثاتی

۴۶ — برای حل نامعادله مثلثاتی باید طریقهٔ حل نامعادلات جبری را بکار برد، یعنی جمیع جمل را بیکطرف نامعادله نقل کرد و پس از انجام اعمال لازم عبارت را بحاصل ضرب عوامل تجزیه و علامت هر عامل را در فواصل جوابها تحقیق کرد و از مقایسه علامات، جوابهای نامعادله را تعیین نمود.

مثال - برای حل نامعادله $2\sin x - \sqrt{3} > 0$ وقتیکه $0 < x < 2\pi$ باشد ابتدا آن را مساوی صفر قرار میدهیم و جوابهایش را که عبارتند از $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{2\pi}{3}$ (جوابهای بین صفر و 2π) بدست آورده جدول ذیل را تشکیل میدهیم:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		2π
$2\sin x - \sqrt{3}$		−	0	+	0	−	
نامعادله		جواب ندارد		جواب دارد		جواب ندارد	

پس نامعادله بازاء $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ صادق است.

VIII حل مثلث

۴۷ - حل مثلث یعنی بدست آوردن اجزاء مجهول آن

از روی اجزاء معلوم بوسیله محاسبه .

۴۸ - اگر اجزاء معلوم از اجزاء اصلی مثلث (اضلاع و زوایا) باشند میگویند یك حالت کلاسیك است و اگر از اجزاء فرعی (اشعهٔ دوایر ، ارتفاعات و مانند آنها) باشند یك حالت غیر کلاسیك .

۴۹ - روابط بین اجزاء اصلی مثلث قائم درشماره ۳ (۱ تا ۳) و روابط بین اجزاء اصلی مثلث غیرمشخص درشماره ۳۱ (دستگاههای I و II و III) گفته شده است . و نیز روابط بین سایر اجزاء مثلثها درشمارههای ۳۲ تا ۳۷ درج گردیده اند .

۵۰ - تعادل دستگاهها - درهرمثلث دستگاههای I و II و III (شماره ۳۱) متعادلند یعنی هریك را میتوان ازروی دیگری بدست آورد .

مثلا برای بدست آوردن دستگاه II ازدستگاه I بطریق عمل میکنیم :

$$A = \pi - (B + C)$$

$$\sin^{۲} A = \sin^{۲}(B + C) = \sin^{۲} B \cos^{۲} C + \cos^{۲} B \sin^{۲} C$$
$$+ ۲ \sin B \sin C \cos B \cos C$$
$$= \sin^{۲} B(۱ - \sin^{۲} C) + \sin^{۲} C(۱ - \sin^{۲} B)$$
$$+ ۲ \sin B \sin C \cos B \cos C$$
$$= \sin^{۲} B + \sin^{۲} C + ۲ \sin B \sin C \cos(B + C)$$
$$= \sin^{۲} B + \sin^{۲} C - ۲ \cos B \cos C \cos A$$

و چون بجای $\sin A$ و $\sin B$ و $\sin C$ بترتیب مقادیرشان

$\frac{a}{2R}$ و $\frac{b}{2R}$ و $\frac{c}{2R}$ را که از دستگاه I بدست میآیند قرار دهیم رابطهٔ اول دستگاه II نتیجه میشود .

۵۹ — حل مثلث قائم در حالات کلاسیک

	اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	فرمولهائی که باید بکار برد
حالت اول	a ، B	C ، b ، c	$C = 90 - B$ $b = a \sin B$ $c = a \cos B$
حالت دوم	b ، B	C ، a ، c	$C = 90 - B$ $c = b \cot g B$ $a = \frac{b}{\sin B}$
حالت سوم	b ، a	B ، C ، c	$\sin B = \frac{b}{a}$ $C = 90 - B$ $c = a \sin B$
حالت چهارم	c ، b	B ، C ، a	$tg B = \frac{b}{c}$ $C = 90 - B$ $a = \frac{b}{\sin B}$

۵۳ ـ حل مثلث غیر قائم در حالات کلاسیک

	اجزاء معلوم	اجزاء مجهول	فرمولهائیکه باید بکار برد
حالت اول	C ، a ، B	b ، A ، c	$A = \pi - (B + C)$ $b = a\frac{\sin B}{\sin A}$ $c = a\frac{\sin C}{\sin A}$
حالت دوم	b ، C ، a	A ، c ، B	$\begin{cases} \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} \\ B + A = \pi - C \end{cases}$ $c^{2} = a^{2} + b^{2} - 2ab\cos C$
حالت سوم	A ، b ، a	C ، B ، c	$\sin B = \frac{b}{a}\sin A$ $C = \pi - (A + B)$ $c = a\cos B + b\cos A$
حالت چهارم	c ، b ، a	C ، B ، A	$\cos C = \frac{a^{2} + b^{2} - c^{2}}{2ab}$ $\sin B = \frac{b}{c}\sin C$ $A = \pi - (B + C)$

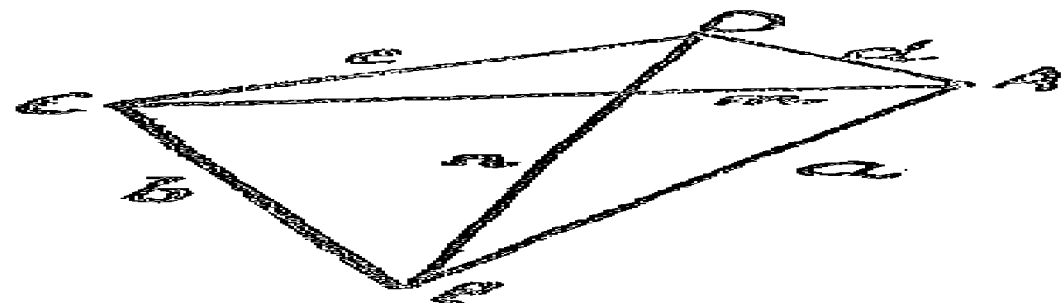
۵۴ ـ حل مثلث در حالات غیر کلاسیک ـ این حالات

بسیار متنوعند و بطور کلی قاعده‌ای برای آنها نمیتوان گفت فقط دو نکته اساسی ذیل بخاطر نشان میشوند .

۱ – در حل و بحث مسائل بهتر است که از محاسبهٔ زوایا شروع شود ، زیرا اضلاع از روی زوایا به آسانی بدست میآیند .

۲ – هرجا مجموع دو مجهول معلوم باشد خوبست تفاضل آن دو را نیز بدست آورد تا به آسانی بتوان آن ها را پیدا کرد .

IX – چهار برهای کوژ

(ش ۲)

۵۴ – هر چهار بر کوژ (محدب) چهار ضلع و چهار زاویه دارد که بفرض معلوم بودن پنج تای آنها بشرط آنکه اقلا دوتای آنها ضلع باشند ، میتوان چهار بر را حل و رسم کرد . در چهار بر A B CD (ش ۲) زوایا را به A و B و C و D و اضلاع را به a و b و c و d نمایش میدهند .

برای محاسبهٔ اجزاء مجهول چهار بر از روی اجزاء معلوم آن ، آنرا بوسیلهٔ رسم دو قطر بمثلثها تجزیه میکنیم و اجزاء مجهول را حساب مینمائیم .

۵۵ – مسئله . از چهار بری چهار ضلع و یک زاویه معلوم است . زوایای دیگر را حساب کنید .

۵ - زاویهٔ بین دو قطر $\sin\alpha = \frac{2S}{mn}$

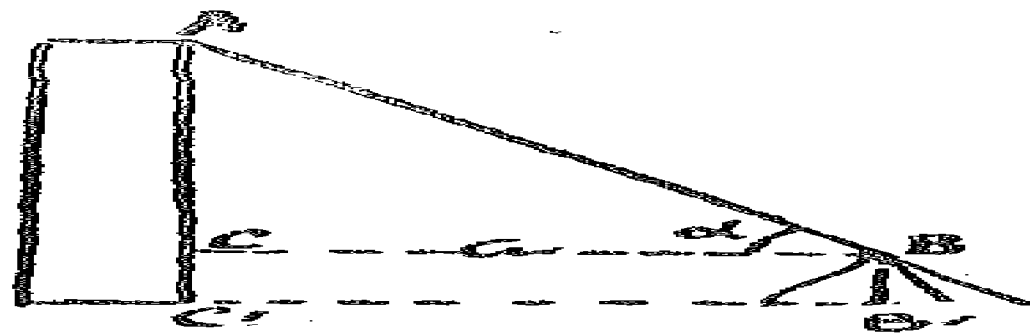
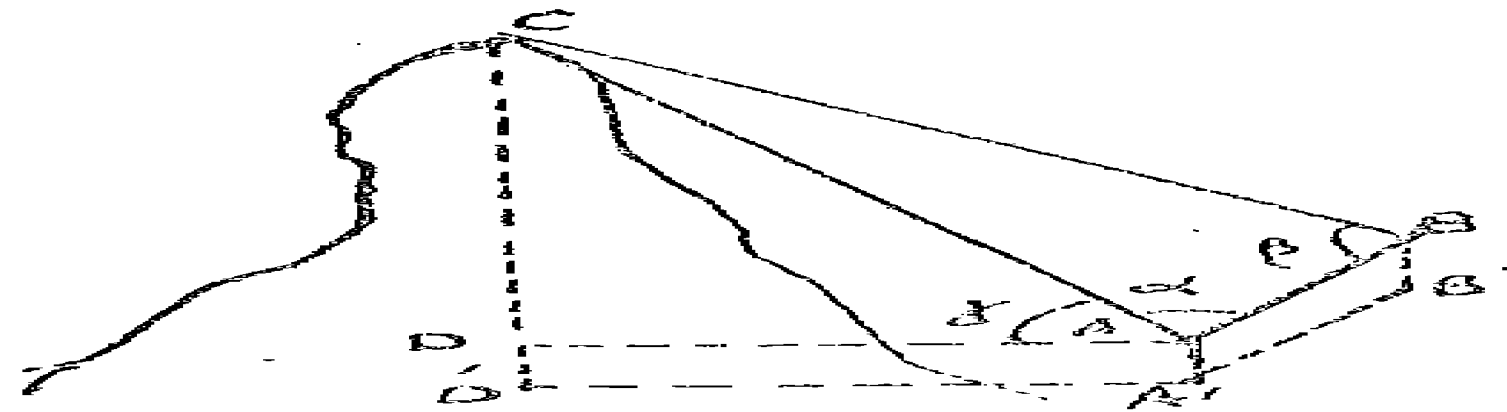
x - استعمال مثلثات در نقشه برداری

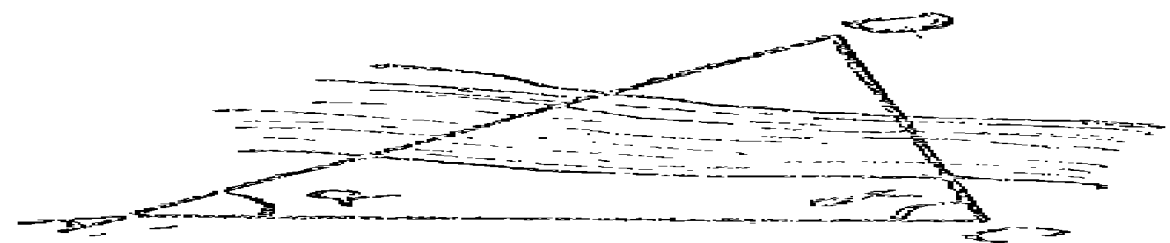
۵۷ - در نقشه برداری از یك قطعه زمین میتوان طول خطوط و مقدار زوایا را با زنجیر مساحی و زاویه‌یاب وافزار دیگر اندازه گرفت. ولی برای مراعات دقت زمین را بمثلثهای متعدد تقسیم میکنند و بوسیلهٔ حل آن مثلثها اجزاء آن را باکمال دقت اندازه می گیرند. این عمل را مثلث بندی یا Triangulation می گویند.

۵۸ - گاهی نیز اندازه گرفتن فاصله بین دو نقطه که در دسترس نیستند یا اندازه گرفتن ارتفاعی لازم میآید. این مسائل بطریق ذیل حل میشوند.

شکل ۳

۵۹ - **تعیین ارتفاع** - ۱) اگر بموقع قائمی که بر نقطه ای که می خواهیم ارتفاعش را تعیین کنیم دسترسی داشته باشیم (شکل ۳) B'C' = BC را با دقت اندازه میگیریم وازحل مثلث ABC ارتفاع نقطه A را بدست میآوریم.

۲) اگر بموقع قائم دسترسی

نباشد (ش۳) طول AB را در روی زمین مسطحی بدقت اندازه میگیریم و زوایای α و β را هم زاویه یاب تعیین می‌- کنیم؛ از حل مثلث ABC طول AC بدست میآید، آنگاه مثلث قائم CAD را با وتر AC و زاویه γ حل میکنیم تا (CD) و در نتیجه (CD') بدست آید (DD' مساوی ارتفاع زاویه یاب از سطح زمین است)

۶۰ – فاصله نقطه A را از D که در دسترس نیست معلوم کنید.

نقطه ای مانند B در نظر گرفته فاصله AB و زوایای α و γ (ش ٤) را اندازه میگیریم و مثلث ABD را حل میکنیم (حالت اول، شماره ۲۵)

۶۱ – اگر به B و A هیچیک دسترسی نباشد (ش ۵) دو نقطه C و D را در نظر گرفته فاصله (CD) و زوایای α و β و γ و δ را اندازه میگیریم.

آنگاه بکمک CD و γ و $\alpha+\beta$ طول AC و بکمک (۱) و β و $\delta+\gamma$ طول BC را حساب میکنیم و از حل مثلث ACB (حالت دوم، شماره ۵۲) AB را بدست میآوریم

شکل ٥

۲٦ـ مسئلهٔ نقشه ـ مواضع سه نقطهٔ اصلی A و B و C روی نقشه مشخص گردیده اند، میخواهیم وضع نقطهٔ M را در روی نقشه معین نمائیم در صورتیکه میدانیم از M قطعهٔ AB بزاویهٔ α و قطعهٔ AC بزاویهٔ β دیده میشود (ش ٦)

براه هندسی میتوان این مسئله را حل کرد باین معنی که در روی نقشه بر AB و CD بترتیب قطعه دایرههای حاوی زوایای α و β را رسم نمود تا از تقاطعشان نقطهٔ M بدست آید.

براه مثلثاتی باید MA و MB و (MC) را حساب کرد ـ برای این کار از معلوم بودن اجزاء مثلث ABC استفاده میکنیم.

شکل ٦

دو مثلث AMB و AMC:

$$\frac{MA}{\sin x} = \frac{c}{\sin \alpha} \quad \text{و} \quad \frac{MA}{\sin y} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{b \sin \alpha}{c \sin \beta} \\ x + y = 2\pi - \alpha - \beta - A \end{cases}$$

از دستگاه اخیر x و y حساب میشوند و از حل مثلثهای AMB و AMC میتوان MB و MC را تعیین کرد و M را بدست آورد.

پایان

۱ تعاریف

۱ — جسم چیزیست که قسمتی از فضا را اشغال کند. مقداری از فضا را که جسم اشغال میکند حجم آنست. فصل مشترک دو جسم یا حد هر جسم را سطح، فصل مشترک دو سطح یا حد هر سطح را خط، فصل مشترک دو خط یا حد هر خط را نقطه گویند.

۲ — خط مستقیم ساده ترین خطها و نامحدود است. نیم خط از یکطرف و قطعه خط از دو طرف محدود میباشند.

۳ — صفحه یا سطح مستوی ساده ترین سطوح و آن نیز نا محدود است.

۴ — دو خط یا دو صفحه موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمیکنند.

۵ — دایره خط منحنی بسته ایست که همهٔ نقاطش از یک نقطه بنام مرکز بفاصله ثابتی بنام شعاع باشند.

۶ — حکم عبارتست از بیان یک فرض و یک مستنبط. اصل متعارفی حکمیست که بی دلیل واضح باشد. اصل موضوع حکمیست که نمیداپذیرفته شود. قضیه حکمیست که اثباتش محتاج باقامه برهان باشد.

۷ — حقایق هندسی مبتنی بر سه اصل ذیل هستند :
۱) برد و نقطه‌ فقط یک خط میگذرد ۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط دیگر میگذرد (اصل موضوع اقلیدس) .
۳) هر شکل را میتوان در صفحه یا فضا جابجا کرد بی آنکه در آن تغییری پیدا شود .

۸ — **مکان هندسی** عبارتست از مجموع نقاطی که همه یک خاصیت هندسی داشته باشند .

۱۱ — زوایا و خطوط عمود بر هم

۹ — زاویه یا گوشه قسمتی از صفحه است که بین دو نیم خط متقاطع محصور باشد . نقطه تلاقی دو خط را **تارک** یا **راس** و هر خط را **پهلو** یا **ضلع** گویند . هر دو نیم خط با یکدیگر دو زاویه میسازند، آنرا که کوچکتر است (و معمولا مراد از زاویه همانست) **کوژ** یا **محدب** و دیگری را **کاو** یا **مقعر** گویند (ش ۱)

۱۰ — ممکنست در صفحه جهت مثبت و منفی قائل شد . مثلا جهت دوران عقربه های ساعت را منفی و جهت مخالف دوران عقربه‌ها را مثبت

ش ۱

فرض کرد . در اینصورت زاویه هم مثبت یا منفی تواند بود . اگر یک ضلع برای اینکه بضلع دیگر نزدیک شود در جهت مثبت دوران کند زاویه مثبت است وگرنه منفی (در ش ۱ xoy

منفی و x۱،۱۱ مثبت است).

۱۱ — **قضیه** — از یك نقطه فقط میتوان یك عمود بر خطی رسم کرد.

۱۲ — نتیجه — خطوط عمود بر یك خط باهم دوازیند.

۱۳ — **اندازهٔ زاویه** — زاویه را با درجه و گراد و رادیان اندازه میگیرند. (رجوع شود بقسمت مثلثات، شماره ۲، صفحه ۱۲۹)

۱۴ — دو زاویه **مجاور** یك ضلع مشترك دارند. دو زاویه مجاور که اضلاع غیرمشترکشان بریك امتداد باشند **مجانب** نامدارند. دو زاویهٔ **متقابل** آنند که اضلاعشان بریك استقامت باشند.

۱۵ - اگر دو زاویه مجانب باهم برابر باشند هر یك را **قائمه** یا **راست** و ضلع مشترکشان را برضلع دیگر عمود مینامند. زاویه کوچکتر از قائمه‌را **تند** یا **حاده** و بزرگتر از آنرا **باز** یا **منفرجه** میگویند.

(ش ۲)

۱۶ - دوزاویه‌را که‌مجموعشان یك قائمه باشد**متمم** و دو زاویه را که مجموعشان دوقائمه باشد **مکمل** گویند.

۱۷ - هرگاه دایره ای در نظر گرفته شود: **زاویه‌مرکزی** آن است که تارکش بر مرکز دایره

باشد (MON) ، گوشهٔ محاطی رأسش بر محیط دایره است (ABC) ، یك ضلع گوشهٔ ظلی بر دایره مماس است (TAC) راس زاویهٔ درونی درداخل دایره (EFG) ورأس زاویه بیرونی خارج دایره (LKH) است . در گوشه محاطی ABC قوس BAC را حاوی زاویه ABC گویند.

اندازه زاویه مرکزی قوس مقابل آنست : ز MON = ق MN

« « محاطی نصف « « : ز ABC = $\frac{1}{2}$ ق AC

« « ظلی « « « : ز TAC = $\frac{1}{2}$ ق AC

« « درونی نصف مجموع دو قوس مقابل آنست :

ز EFG = $\frac{1}{2}$ (ق EG + ق E′G′)

اندازه زاویه بیرونی نصف تفاضل دو قوس مقابل آنست :

ز LKH = $\frac{1}{2}$ (ق LH − ق L′H′)

۱۸ - نیمساز زاویه خطی است که زاویه را نصف میکند .

۱۹ - نیمساز هر زاویه زاویه مقابل آن را هم نصف میکند .

۲۰ - نیمسازهای دو زاویه مجانب بر هم عمودند .

۲۱ - نیمساز زاویه مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه بیك فاصله باشند .

۲۱ - اگر دوخط Δ۱ و Δ۲ را خط سوم D قطع کند (ش ۳) هشت زاویه حادث میشود :

دو زاویه غیر مجاور را که در یک طرف D باشند متقابل و دو زاویه را که در دو طرف D باشند متبادل گویند؛ دو زاویه را که بین Δ۱ و Δ۲ باشند درونی و زاویه های خارج Δ۱ و Δ۲ را بیرونی نامند.

۲۲ - قضیه - اگر دوخط موازی را خط سومی قطع کند دو زاویه متبادل همنام باهم برابرند.

۲۳ - قضیه عکس - اگر دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویه متبادل همنام با هم برابر باشند دو خط اول با یکدیگر موازیند.

۲۴ - حالات برابری زوایا

قضیه - دوزاویه که اضلاعشان با یکدیگر موازی باشند برابر یا مکملند.

قضیه - دوزاویه که اضلاعشان بر یکدیگر عمود باشند برابر یا مکملند.

قضیه - دوزاویه متقابل برأس باهم برابرند.

III. چند برها

۲۵ — شکل حادث از تقاطع چند خط را چند بر گویند. هر خط را یک ضلع یا پهلو و محل تقاطع دو ضلع را

زاویه یا رأس مینامند . اگر امتداد هیچیك از اضلاع شکل را قطع نکند چندبر را کوژ و گرنه کاو نامند . چندبر منظم آنست که همه زوایایش باهم و همه اضلاعش باهم مساوی باشند .

زاویه بین هردوضلع یك زاویه درونی و آنکه بین یك ضلع و امتداد ضلع دیگر باشد زاویه بیرونی نام دارد . در چندبر منظم یك نقطه میتوان یافت که از همه اضلاع بیك فاصله باشد، این نقطه را مرکز مینامند . خطی را که از مرکز بر یکی از اضلاع عمود شود ارتفاع Apothème میگویند .

مجموع طولهای اضلاع محیط یا پیرامون است . قطر خطی است که دو تارك غیرمجاور را بهم ربط دهد .

۲۷ - قضیه - مجموع زوایای درونی چند بر n ضلعی $(2n-4)$ قائمه است .

۲۷ - قضیه - مجموع زوایای بیرونی هرچند بر چهار قائمه است .

۲۸ - قضیه - تعداد اقطار چند بر n ضلعی $\frac{n(n-3)}{2}$ است .

۱۷ مثلث

۲۹ - مثلث ساده‌ترین چند برهاست . اگر دو ضلع آن مساوی باشند متساوی‌الساقین و هر یك از دو ضلع مساوی را ساق و اگر هر سه ضلع متساوی باشند متساوی‌الاضلاع است .

اگر یك زاویهٔ آن قائمه باشد **قائم** است وضلع مقابل بزاویه قائمه را **وتر** گویند . **میانه** خطی است که از رأس بوسط ضلع مقابل وصل شود . **ارتفاع** عمودیست که ازرأس برضلع مقابل فرود آید . **عمود منصف** خطی است که بروسط یك ضلع عمودگردد .

دایرهٔ محیطی آنست که بر سه رأس بگذرد . **دایرهٔ محاطی** برسه‌ضلع مماس‌میباشد . دایره **محاط خارج** هرضلع آنست که بر آن ضلع و امتداد دوضلع دیگر مماس باشد .

۳۰ – **قرارداد** . دراین کتاب هر زاویه مثلث رابایك حرف بزرك وضلع مقابل آنرا با همان حرف ولی کوچك میخوانیم .

ارتفاعات وارد بر اضلاع a و b و c را h_a و h_b و h_c؛ میانه‌های آن اضلاع را m_a و m_b و m_c؛ شعاع‌دایرهٔ محیطی را R ، از آن دایرهٔ محاطی را r و اشعهٔ دوایر محاط براضلاع a و b و c را r_a و r_b و r_c و مساحت مثلث را S مینامیم .

درسه‌بر متساوی‌الساقین رأس مشترك دوساق را A نام میگذارند و آنرا بطور مطلق‌راس میگویند . درمثلث قائم رأس زاویه قائمه‌را A مینامند . محیط مثلث یعنی $a+b+c$ را $2p$ میگویند .

۳۱ – **قضیه** – مجموع زوایای مثلث ۲ قائمه است .

۳۲ – **قضیه** – درمثلث هرضلع کوچکتراست ازمجموع

بزرگتر است از تفاضل دوضلع دیگر .

$$b - c < a < b + c$$

۳۳ ـ قضیه ـ در مثلث متساوی‌الساقین برأس A
[illegible]

۳۴ ـ قضیه ـ در مثلث متساوی‌الساقین میانه‌های وارد بر دوساق با هم برابرند ؛ همچنین ارتفاعهای وارد برساقها و نیمساز گوشه‌های مجاور دوساق .

۳۵ ـ قضیه ـ در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه قاعده و نیمساز زاویه رأس هم هست .

۳۶ ـ قضیه ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع :

زA = زB = زC = ۶۰°

۳۷ ـ قضیه ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع سه ارتفاع باهم مساویند .

حالات برابری مثلثها

۳۸ ـ قضیه ـ دو مثلث در این حالات باهم برابرند :

۱) اگر دوضلع وزاویه بین آنها در آن دو مثلث نظیر بنظیر مساوی باشند .

۲) اگر دو زاویه و ضلع بین آنها در آن دو مثلث نظیر بنظیر مساوی باشند .

۳) اگر سه ضلع آنها نظیر بنظیر مساوی باشند .

۴) اگر دوضلع وزاویه مقابل بضلع بزرگتر در آن دو مثلث نظیر بنظیر مساوی باشند .

۳۹ – قضیه – اوساط اضلاع مثلث ، مواقع ارتفاعات وارد براضلاع ووسط هرقطعه ازارتفاع واقع بین رأس ومحل تلاقی ارتفاعات نه نقطه‌اند واقع برروی یك دایره (دایره نه نقطه) .

تناسب و تشابه

۴۰ – **قضیه طالس** – خطی ، که موازی یك ضلع مثلث رسم شود دوضلع دیگررا بریك نسبت قطع میکند .

بعکس – خطی که دوضلع مثلث را بقطعات متناظر متناسب تقسیم کند موازی ضلع سوم است .

۴۱ – **قضیه** . خطی که‌اوساط دوضلع‌مثلث‌را بهم ربط دهدموازی ضلع‌سوم ومساوی نصف‌آنست .

۴۲ – **تعریف** –دوشکل را مشابه یا همانندگویندوقتی که اضلاع متناظرشان متناسب و زوایای متناظرشان متساوی باشند .

۴۳ – **قضیه**– دوسه‌بر دراین‌احوال باهم مشابهند :

۱ – وقتی دو زاویهٔ یکی نظیر بنظیر بادوزاویهٔ دیگری برابر باشند :

ا = ا′ ز ، ب = ب′ ز

۲ — یك زاویهٔ یکی با یك زاویهٔ دیگری‌مساوی‌بوده و اضلاع آن دو زاویه با یکدیگر متناسب باشند :

ا = ا′ ز ، $\frac{اب}{اج} = \frac{ا'ب'}{ا'ج'}$

۳ ـ سه ضلع آنها متناسب باشند .

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

٤ ـ دو ضلعشان متناسب و زاویه مقابل بضلع بزرگتر در هردو مساوی باشد .

٥ ــ اضلاعشان بترتیب برهم عمود یا باهم موازی باشند

خواص منصف زاویه

٤٤ ــ قضیه ـ منصف (نیمساز) هرزاویه داخلی ضلع مقابل را بنسبت دو ضلع دیگر تقسیم میکند .

٤٥ ـ قضیه ـ همچنین نیمساز هر زاویه بیرونی .

٤٦ ـ قضیه ـ محل برخورد نیمسازهای داخلی وخارجی با یك ضلع مثلث نسبت بدو انتهای این ضلع مزدوج توافقی یکدیگرند . (یعنی اگر نقاط مذکور را M و M' و دو راس را B و C بنامیم :

$$\frac{MB}{MC} = \frac{M'B}{M'C}$$

٤٧ ـ قضیه ـ در دو مثلث متشابه ، ارتفاعات وارد بر ضلعهای متناظر ، نیمسازهای زوایای متناظر و سایر خطوط متناظر مانند شعاعهای دوایر محیطی و محاطی بر نسبت تشابه دو شکلند .

٤٨ ـ قضیه ـ مساحات دو مثلث که یك زاویه مساوی داشته باشند بر نسبت حاصلضربهای اضلاع آن زاویه است .

۴۹ - قضیه - در دو مثلث متشابه مساحات بر نسبت مربع اضلاع متناظر ند.

۵۰ - قضیه - در هر مثلث مربع ضلع مقابل بزاویه حاده (منفرجه) مساویست با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر منهای (باضافه) دو برابر حاصلضرب یکی از آنها در تصویر ضلع دیگر بر آن.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.BH$$
$$= a^2 + c^2 - 2c.BH'$$

(ش ۴و۳)

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2a.BH$$
$$= a^2 + c^2 + 2c.BH'$$

(۱) (۲)

(ش ۳و۴)

۵۱ - قضیه - مجموع مربعهای دو ضلع مثلث مساوی دو برابر مربع نصف ضلع سوم باضافه دو برابر مربع میانهٔ وارد بر این ضلع است.

نتیجه - مکان هندسی نقاطی که مجموع مربع های فواصلشان از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد محیط دایره ایست که مرکز آن بر وسط خط واصل بین نقاط مفروض واقع است.

۵۲ - قضیه - تفاضل مربعهای دو ضلع مثلث مساویست بدو برابر حاصلضرب ضلع سوم در تصویر میانه همین ضلع بر خود آن.

نتیجه - مکان هندسی نقاطی که تفاضل مربعات فواصلشان از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی باشد خطی است عمود بر خط

واصل بین آن دو نقطه.

۵۳ - قضیه استوارت Stewart - اگر نقطهٔ D بر روی ضلع BC از سه بر ABC اختیار گردد:

$$AB^2 . CD + AC^2 . BD - AD^2 . BC = BC . CD . DB.$$

روابط بین اجزاء مختلف مثلث:

۵۴) ارتفاعات:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

قطعاتی از اضلاع که بوسیله ارتفاعات جدا میشوند:

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad \text{و} \quad HC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$CH' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \quad \text{و} \quad H'A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$AH'' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{و} \quad H''B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$$

۵۵ — منصف زاویه‌ها - فرض میکنیم AD و BD' و CD'' منصف الزاویه‌های داخلی و AD₁ و BD'₁ و CD''₁

منصف‌الزاویه‌های خارجی مثلث ABC باشند :

اولاً طول قطعاتی از اضلاع که بوسیله منصف‌الزاویه‌های داخلی جدا شده‌اند عبارتند از :

$$BD = \frac{ac}{b+c} \quad \text{و} \quad DC = \frac{ab}{b+c}$$

$$CD' = \frac{ab}{c+a} \quad \text{و} \quad D'A = \frac{bc}{c+a}$$

$$AD'' = \frac{bc}{a+b} \quad \text{و} \quad D''B = \frac{ac}{a+b}$$

ثانیاً طول قطعات هریک از اضلاع جدا شده بوسیله منصف‌الزاویه‌های خارجی عبارتند از :

$$\overline{D_1B} = \frac{ac}{b-c} \quad \text{و} \quad \overline{D_1C} = \frac{ab}{b-c}$$

$$\overline{D'_1C} = \frac{ab}{c-a} \quad \text{و} \quad \overline{D'_1A} = \frac{bc}{c-a}$$

$$\overline{D''_1A} = \frac{bc}{a-b} \quad \text{و} \quad \overline{D''_1B} = \frac{ac}{a-b}$$

ثالثاً طول هریک از منصف‌الزاویه‌های داخلی عبارتست از

$$AD = \sqrt{bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right]} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$BD' = \sqrt{ca\left[1 - \frac{b^2}{(c+a)^2}\right]} = \frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)}$$

$$CD'' = \sqrt{ab\left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right]} = \frac{2}{b+a}\sqrt{abp(p-c)}$$

رابعاً طول هر یك از منصف الزاویه‌های خارجی عبارتست از :

$$AD'_1 = \sqrt{bc\left[\frac{a^2}{(b-c)^2} - 1\right]} = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$BD'_1 = \sqrt{ca\left[\frac{b^2}{(c-a)^2} - 1\right]} = \frac{2}{c-a}\sqrt{ca(p-c)(p-a)}$$

$$CD''_1 = \sqrt{ab\left[\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1\right]} = \frac{2}{a-b}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

۵۶ — میانه‌ها

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$

$$m_b = \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}} \qquad m_c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}$$

۵ — دایره‌های محیطی ، محاطی و محاط خارج

شعاع دایره محیطی $R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c}$

$$= \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

شعاع دایره محاطی $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{2S}{a+b+c}$

شعاع دایره محاط خارج $r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}} \qquad r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دایره محاطی:

قطعه بین رأس A و نقطه تماس $= p - a$

» » B » » » $= p - b$

» » C » » » $= p - c$

قطعات محدود بین رؤس و نقاط تماس دوایر محاط خارج:

قطعه بین A و دایره محاط خارجی ضلع a $= p$

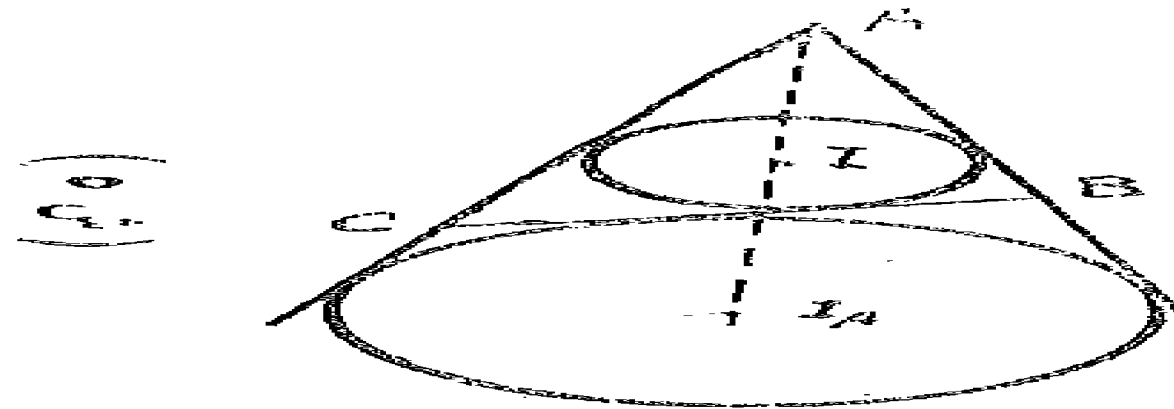
» » » B » $= p - c$

» » » C » $= p - b$

قطعاتی بر روی منصف زاویه رأس A که بین مراکز دوایر و رأس A محصورند: (ش ۵)

$$AI_a = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}} \qquad AI = \sqrt{bc\frac{p-a}{p}}$$

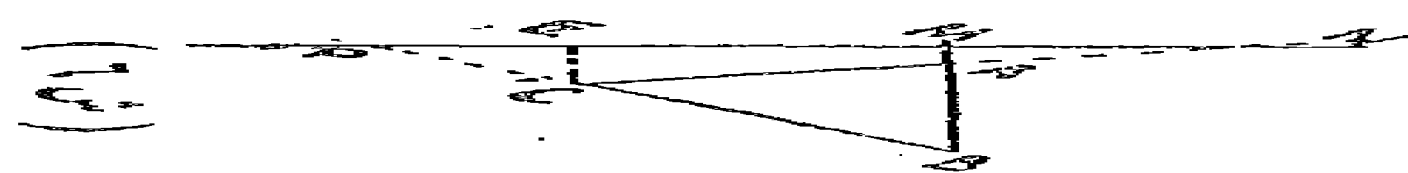
۵۸ — قضیه حاصلضرب دو ضلع مثلث مساویست با: ۱) حاصل ضرب قطعاتی که منصف زاویه درونی بر روی ضلع سوم جدا میکند باضافه مربع این منصف زاویه. ۲) باحاصلضرب قطعاتی که منصف زاویه بیرونی بر روی ضلع مقابل جدامیکند، منهای مربع این منصف زاویه.

(ش ۵)

۵۹ — قضیه — مواقع منصف زوایای خارجی مثلث سه نقطه‌اند واقع بر یك استقامت.

مور بات

۶۰ — قضیه منلاؤس — هر گاه مورب △ سه‌ضلع مثلث ABC (یا امتداد آنها) را در M و N و P قطع کنند (ش ۶)

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{PC}{PB} \cdot \frac{NB}{NA} = 1$$

۶۱ — قضیه سوا — هر گاه سه‌رأس مثلث ABC را به نقطهٔ O واقع در صفحهٔ آن وصل نموده امتداد دهیم تا اضلاع مقابل را در M و N و P قطع نمایند (ش ۷)

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

۷ چهاربر (یا چهار ضلعی)

۶۲ — چهار برهای مهم — هر چهار بری که هر دو ضلع مقابل آن با یکدیگر موازی باشند متوازی الاضلاع است. در متوازی الاضلاع هر ضلع را میتوان قاعده دانست و عمودی را که از راس مقابل بر آن فرود آید ارتفاع مینامند. و استگوشه یا مستطیل متوازی الاضلاعی است که یك زاویه آن قائمه باشد؛ لوزی یا معین متوازی الاضلاعی است که دو

ضلع مجاورش با هم مساوی باشند. مربع مستطیلی است که لوزی هم باشد. ذوزنقه شکلی است که دو ضلع آن با هم موازی، و دو ضلع دیگرش ناموازی باشند؛ دو ضلع موازی را دو قاعده و عمود مشترك بین آنها را ارتفاع ذوزنقه گویند. چهار بر محاطی آنست که بتوان دایره‌ای برچهار راسش گذراند. چهار بر محیطی آنست که بتوان دایره‌ای بر چهار ضلعش مماس کرد. هرگاه اضلاع مقابل چهار بر ABCD یکدیگر را در E و F قطع کنند شکل ABCDEF را یك **چهار بر کامل** مینامند.

متوازی الاضلاع

۶۳ – **قضیه** – در متوازی‌الاضلاع ۱) هردوضلع مقابل با هم مساویند. ۲) دوقطر منصف یکدیگرند. ۳) دوزاویه مقابل با یکدیگر مساویند. ٤) دو زاویه مجاور مکمل یکدیگرند.

٦٤ – **قضیه عکس** – اگر درچهار بری ۱) هردوضلع با هم مساوی و موازی باشند؛ ۲) دوقطر منصف هم باشند؛ ۳) دوزاویه مقابل بایکدیگر مساوی باشند؛ ٤) دوزاویه مجاور مکمل هم باشند؛ شکل متوازی‌الاضلاع است.

٦٥ – **قضیه** – محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع مرکز تقارن شکل است.

٦٦ – **قضیه** – مساحت متوازی‌الاضلاع مساویست بحاصل ضرب قاعده در ارتفاع.

لوزی

۶۷ – قضیه – در لوزی دوقطر برهم عمودند.

۶۸ – قضیه – اگر در متوازی‌الاضلاعی دوقطر برهم عمود باشند شکل لوزیست.

۶۹ – قضیه – اگر دوقطر چهار بری برهم عمود و منصف هم باشند شکل لوزیست.

۷۰ – قضیه – هریك از دوقطر لوزی یك محور تناظر شکل است.

۷۱ – قضیه – مساحت لوزی مساویست با نصف حاصل ضرب دو قطر.

مستطیل و مربع

۷۲ – قضیه – در مستطیل دوقطر با یکدیگر برابرند.

۷۳ – عکس قضیه – اگر دو قطر متوازی الاضلاع مساوی باشند شکل مستطیل است.

ذوزنقه

۷۴ – قضیه – خطی که اوساط دوساق (اضلاع ناموازی) ذوزنقه را بهم وصل کند موازی قاعده و مساوی نصف مجموع دوقاعده است.

۷۵ – قضیه – در ذوزنقه متساوی الساقین: ۱) زوایای مجاور بهر قاعده برابرند. ۲) دوقطر باهم مساویند.

۷۶ – قضیه – خطی که از محل برخورد دو قطر ذوزنقه موازی قاعده رسم شود بوسیله دو ساق بدو جزء مساوی

تقسیم میشود .

۷۷ – قضیه – مساحت ذوزنقه مساویست با حاصلضرب ارتفاع در نصف مجموع دو قاعده .

چهار بر محیطی

۷۸ – قضیه – در چهار بر محیطی مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر .

۷۹ – عکس قضیه – اگر مجموع دو ضلع مقابل یک چهار بر کوژ مساوی مجموع دو ضلع دیگر باشد شکل قابل محیط شدن بر دایره است .

چهار بر محاطی

۸۰ – قضیه – در چهار بر محاطی زوایای مقابل مکمل یکدیگرند .

۸۱ – اگر در چهار بر محاطی اضلاع را بترتیب a و b و c و d و اقطار را m و n و محیط را 2p بنامیم :

قضیه بطلمیوس :

$$\frac{m}{n} = \frac{ad + bd}{ab + cd}$$

$$m \cdot n = ac + bd$$

$$m = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}$$

$$n = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + ba)}{ad + bc}}$$

تنبیه :

$$\text{مساحت } S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\text{شعاع دایره محیطی} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$

چهار بر کامل

۸۲ – قضیه Gauss – اوساط قطر چهار بر کامل بر یک امتدادند.

۸۳ – قضیه پاپوس – در هر چهار بر کامل هر قطر بوسیله دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم میشود.

۱۷ چند برهای منتظم

۸۴ – تعریف – در چند بر منتظم همه اضلاع با هم و همه زوایا باهم برابرند.

۸۵ – قضیه – چند بر منتظم قابل محاط شدن در دایره و محیط شدن بر دایره است.

۸۶ – قضیه – هرگاه محیط دایره را به n جزء مساوی تقسیم نمائیم: ۱) از وصل کردن نقاط تقسیم n بر منتظم محاطی بدست میآید ۲) از تقاطع مماسهائی که بر نقاط تقسیم رسم شوند n بر منتظم محیطی بدست میآید. ۳) اگر نقاط تقسیم را m به m بهم وصل کنیم m بر منتظم کوکبی حاصل میشود. تعداد چند برهای منتظم m کوکبی مساویست با عده اعداد کوچکتر از $\frac{n}{2}$ که نسبت به m اول باشند.

هرگاه ضلع n بر محاطی را C_n و از آن n بر محیطی را A_n و شعاع دایره را R و عمودی را که از مرکز چند بر محاطی بر ضلع فرود میآید (یعنی ارتفاع apothème) را a بنامیم این روابط را خواهیم داشت :

۸۸ ـ محاسبه C_{2n} برحسب C_n :

$$C_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - C_n^2}\right)}$$

۸۸ ـ محاسبه A_n برحسب C_n :
$$A_n = \frac{2RC_n}{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}$$

۸۹ ـ محاسبه A_{2n} برحسب A_n :

$$A_{2n} = \frac{2A_n R}{2R + \sqrt{4R^2 + A_n^2}}$$

۹۰ ـ محاسبه a_n برحسب C_n :
$$a_n = \frac{\sqrt{4R^2 - C_n^2}}{2}$$

۹۱ ـ ضلع و ارتفاع چند بر منتظم :

۱ ــ سه بر $a_3 = \frac{R}{2}$ $C_3 = R\sqrt{3}$

۲ ــ مربع $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ $C_4 = R\sqrt{2}$

۳ – پنج بر:

$$a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1) \quad ; \quad C_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

۴ – شش بر:

$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad C_6 = R$$

۵ – ده بر:

$$a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad ; \quad C_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

۶ – پانزده بر:

$$C_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$$

۹۲ — اگر r شعاع دایره محیطی و a ارتفاع n بر منتظمی که محیطش p باشد و r′ شعاع و a′ ارتفاع 2n بر منتظمی که محیط آن نیز همان p باشد، بین چهار مقدار a و r و a′ و r′ این روابط برقرار است:

$$a' = \frac{a+r}{2} \quad ; \quad r' = \sqrt{\frac{r(a+r)}{2}}$$

۹۳ – قضیه – مساحت چند بر منتظم برابر است با حاصل ضرب نصف محیط در ارتفاع آن.

۹۴ – قاعده – برای بدست آوردن مساحت چند بر نامنتظم آنرا بوسیله رسم قطرها بسه برها و ذوزنقه ها تقسیم میکنیم و مساحتهای اجزاء آنرا بیکدیگر میافزائیم.

VII دایره

۹۵ — قضیه — هر قطر محور تقارن دایره است .

۹۶ — قضیه — خط مستقیم دایره را فقط در دو نقطه قطع میکند .

تبصره — اگر دو نقطه برهم منطبق شوند خط را بر دایره مماس گویند .

اوضاع نسبی دو دایره

۹۷ — دو دایره ممکن است متخارج ، مماس خارج ، متقاطع ، مماس داخل یا متداخل باشند . فاصله مرکز دو دایره را بعد المرکزین میگویند و با d نمایش میدهند .

۹۸ — قضیه در دو دایره متخارج $d > R + R'$

« « مماس خارج $d = R + R'$

« « متقاطع $R - R' < d < R + R'$

« « مماس داخل $d = R - R'$

« « متداخل $d < R - R'$

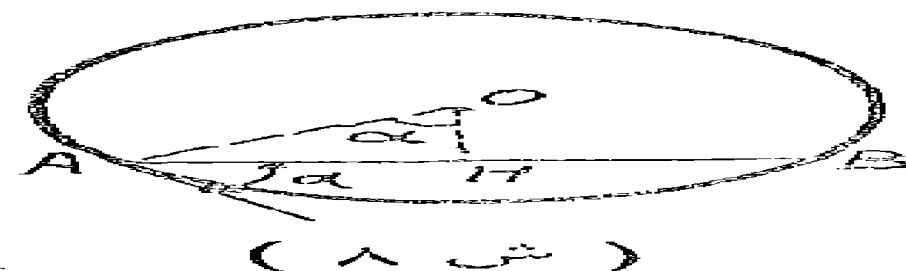
۹۹ — قضیه — در دو دایره مماس برهم خط المرکزین از نقطه مماس میگذرد .

۱۰۰ — قضیه — در دو دایره متقاطع خط المرکزین بر وتر مشترک عمود است .

اندازه زاویه

۱۰۱ — برای زاویه های مرکزی ، محاطی ، ظلی ، داخلی و مقیاس آنها رجوع شود بشماره ۱۷۰

۱۰۲ – قضیه – دریك دایره یا دوایر مساوی قوسهای مساوی مقابلند بزوایای مرکزی مساوی و بعکس .

۱۰۳ – مسئله – بر قطعه AB دایره حاوی زاویه α (شماره ۱۷) را مرور دهید .

کافیست AC را چنان رسم کنیم که با AB زاویه α را بسازد (ش ۸) عمودی که از A بر AC اخراج شود عمود منصف AB را در O قطع میکند . O مرکز و OA شعاع دایره مطلوبست .

A B O H α α

(ش ۸)

قوس و وتر

۱۰٤ – قضیه – هر وتر کوچکتر است از قطر .

۱۰۵ – قضیه – دو انتهای قطری که بریك نقطه میگذرد دورترین و نزدیکترین نقاط دایره نسبت بآن نقطه اند .

۱۰٦ – قضیه – دریك دایره وترهای مساوی مقابلند بقوسهای مساوی .

۱۰۷ – قضیه – ۱) دو وتر مساوی ازمرکز دایره بیك فاصله اند . ۲) ازدو وتر نامساوی آنکه بمرکز نزدیکتر است بزرگتر است .

عکس قضیه هم صحیح است .

۱۰۸ – قضیه – قطر عمود بر وتر و وتر و قوس مقابل آنرا نصف میکند .

۱۰۹ — قضیه — مماس بر دایره بر شعاع نقطهٔ تماس عموداست.

۱۱۰ — قضیه — هرخطی که برانتهای شعاعی عمود باشد بردایره مماس است.

۱۱۱ — رسم مماس بردایره — ۱) اگر نقطهٔ M بر دایره باشد برانتهای شعاعی که برآن نقطه بگذرد خطی عمود باید کرد. ۲) اگر نقطهٔ M بیرون دایره و O مرکز دایره باشد بقطر OM دایره ای میکشیم تا دایرهٔ مفروض را در T و 'T قطع کنند، MT و 'MT جوابهای مسئله اند. ۳) اگر مماس باید موازی امتداد △ باشد از مرکز دایره عمودی بر △ فرود میآوریم تا دایره را دردو نقطه قطع کند و برآن دو نقطه دو مماس میکشیم.

۱۱۲ — تعریف — خطی که بردو دایره مماس باشد مماس مشترک دودایره است. اگر دو دایره یکطرف مماس باشند **مماس مشترک خارجی** است و اگر دو طرف مماس باشند **مماس مشترک داخلی**.

۱۱۳ — جدول نماینده وضع دو دایره و تعداد مماسهای مشترک

وضع دو دایره	خارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل
تعداد مماسهای مشترک داخلی	۲	۲	۲	۱	۰
« « خارجی	۲	۱	۰	۰	۰
جمع	۴	۳	۲	۱	۰

۱۱٤ – قاعده رسم مماس مشترك خارجی : اگر O و O' مراکز و R و R' شعاعهای دو دایره ($R > R'$) باشند و بقطر OO' يك دایره و بمرکز O و شعاع $R - R'$ دایره دیگری بزنیم تا یکدیگر را در M و M' قطع نمایند ، از O به M و M' وصل میکنیم و از محل تقاطع OM و OM' با دایره O خطوطی موازی OM و OM' میکشیم؛ این خطوط مماسهای مطلوبند .

۱۱۵ – برای رسم مماسهای مشترك داخلی عیناً مانند حالت قبل عمل میکنیم جز اینکه دایرهایکه بمرکز O رسم میکنیم بشعاع ($R + R'$) خواهد بود .

قوت نقطه

۱۱۶ – **قضیه** – چون دو وتر یکدیگر را درداخل دایره قطع کنند حاصلضرب دو قطعه یکی برابر است بحاصلضرب دو قطعه دیگری .

۱۱۷ – **قضیه** – هرگاه دو قاطع دربیرون دایره یکدیگر را تلاقی نمایند حاصلضرب هر يك در جزء خارجی آن مساوی است بحاصلضرب قاطع دیگر در قسمت خارجیش .

نتیجه – اگر از يك نقطه قاطع و مماس بر يك دایره رسم شوند مربع مماس مساویست باحاصلضرب تمام قاطع در جزء خارجی آن .

۱۱۸ – **قضیه** – اگر بر روی دو خط که در O یکدیگر را قطع کرده، باشند چهار نقطه A و B و A' و B' چنان باشند

که OA . OB = OA' . OB' باشد آن چهار نقطه بر محیط یك دایره قرار دارند .

۱۱۹ – تعریف – قوت یا توان یك نقطه نسبت بدایره حاصلضرب دو قطعهٔ قاطعی است که در این نقطه بر دایره رسم شود

(ش ۹)

$$p = OA \cdot OB = OM \cdot ON = (d + R)(d - R) = d^2 - R^2$$

بحث – اگر O بیرون دایره باشد $p = d^2 - R^2 > 0$

« « « « « $p = d^2 - R^2 = 0$

« « « « « $p = d^2 - R^2 < 0$

۱۲۰ – تعریف – محور اصلی دو دایره مکان هندسی نقاطی است که نسبت بایندو دایره یك قوه داشته باشند .

۱۲۱ – قضیه – محور اصلی دو دایره خطی است عمود برخط المرکزین . اگر فاصله O و O' مراکز دو دایره را a و شعاعشان را R و R' و موقع محور اصلی بر خط المرکزین را H بنامیم :

$$OH = \frac{R^2 - R'^2 + a^2}{2a}$$

نتیجه – محور اصلی دوایر متحدالمرکز بفاصله بینهایت دور واقع است .

۱۲۲ – تعریف – چند دایره که یك محور اصلی داشته

باشند یک دسته دایره faisceau تشکیل میدهند .

۱۲۳ – قضیه – محورهای اصلی سه دایره که مراکز آنها بر یک امتداد نباشند بر یک نقطه میگذرند . این نقطه را مرکز اصلی سه دایره گویند .

۱۲۴ – حل و بحث معادله درجه دوم $x^2 - sx + p = 0$ دو محور عمود بر هم Ox(۱) و Oy(۲) رسم میکنیم (ش ۱۰) در روی Oy ، $OU = 1$ و $OP = p$ و در روی Ox ، $OS = \frac{s}{2}$ را جدا میکنیم ، عمود منصف PU عمود بر یرا که از S بر Ox خارج شود در (ن) قطع میکند دایره‌ای که بمرکز (ن) و شعاع P(ن) رسم شود Ox را در M و N قطع میکند و OM و ON جوابهای معادله اند .

دو دایره عمود بر هم

۱۲۵ – تعریف – زاویه بین دو دایره : زاویه بین دو متقاطع زاویه بین دو مماس است که از یکی از نقاط تقاطع بر دو دایره رسم شوند . دو دایره را که زاویه بین آنها ۹۰° باشد عمود بر هم گویند .

۱۲۶ - قضیه - محور اصلی دو دایره مکان مراکز دوایر عمود بر آن دو دایره است .

۱۲۷ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه دو دایره برهم عمود باشند آنست که قطر یکی بوسیله دیگری بمزدوج توافقی تقسیم شده باشد .

۱۲۸ — قضیه — کلیه دوایری که دو دایره مفروض را بزاویه قائمه قطع میکنند بر دو نقطه ثابت واقع برخط المرکزین آن دو دایره میگذرند .

محیط و مساحت دایره

۱۲۹ - قضیه - محیط دایره حد مشترک محیط چندبر محیط بر آن و محاط در آنست وقتی عدد اضلاع این چندبرها بینهایت زیاد شود .

۱۳۰ - قضیه - نسبت محیطهای دو دایره مساوی نسبت شعاعهای آنهاست .

۱۳۱ - قضیه نسبت محیط دایره بقطر آن عدد یست ثابت این عدد ... ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۸ $= \pi$ است .

نتیجه - ۱) محیط دایره ای بشعاع R مساویست با $۲\pi R$

۲) طول قوس α درجه مساویست با $۲\pi \frac{\alpha}{۳۶۰} R$

۱۳۲ - محاسبه π - بدو طریق ممکنست : ۱) دستور محیطها که در آن حد محیط چندبر محاطی در دایره ای بشعاع $\frac{۱}{۲}$ —— R را پیدا میکنند ، زیرا در دایره ای که

$$C = ۲\pi R = ۲\pi \frac{۱}{۲} = \pi$$

۲) دستور محیط های برابر (Isvpérimétres)
که در آن عکس شعاع دایره‌ای را که محیطش مساوی ۲ است
بدست میآورند ، زیرا در چنین دایره‌ای

$$\pi = \frac{۱}{R} \text{ پس } R = \frac{C}{۲\pi} = \frac{۲}{۲\pi} = \frac{۱}{\pi}$$

۱۳۳ - قضیه - مساحت دایره مساویست با $\pi R^۲$

۱۳۴ - تعریف - قطاع دایره قسمتی از دایره است محصور بین یك قوس ودو شعاع . قطعه دایره محصور است بین یك قوس و وتر آن

۱۳۵ - قضیه - ۱) مساحت قطاع مساویست بحاصلضرب قوس آن در نصف شعاع . ۲) مساحت قطعه مساویست بحاصلضرب نصف شعاع در فزونی طول قوس آن بر نصف وتر قوس مضاعف آن قوس .

VIII بردارها

۱۳۶ - تعریف - بردار قطعه خطی است که دارای مقدار و امتداد و جهت معین باشد . دو بردار موازی و مساوی و دریك جهت را همسنك ، دو بردار همسنك واقع بر یك خط را همچنین یا معادل خوانند . دو بردار موازی و مساوی ولی در دو جهت مختلف را جفت یا زوج گویند .

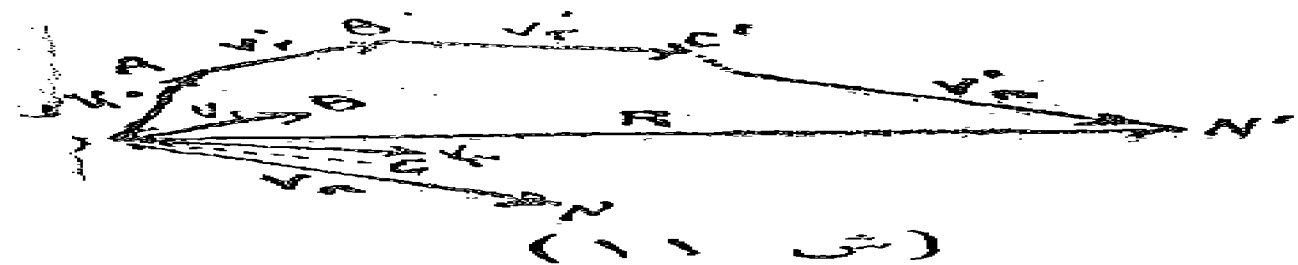
۱۳۷ - مقدار جبری بردار - مساویست با طول (آبسیس) منتها منهای طول مبدأ آن .

١٣٨ – قضیه شال – ١) اگر سه نقطهٔ ثابت A و B و C بر یك امتداد باشند .

$$(AB)+(BC)+(CA)=0$$

٢) اگر چند نقطهٔ A و B و C و... K و L بر یك امتداد باشند :

$$(AB)+(BC)+\cdots+(KL)+(LA)=0$$

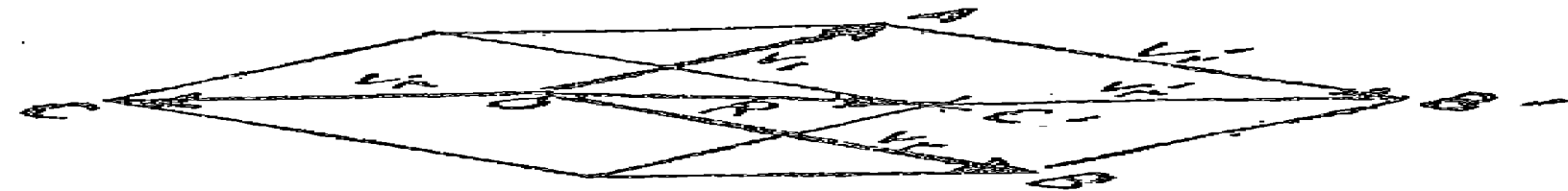
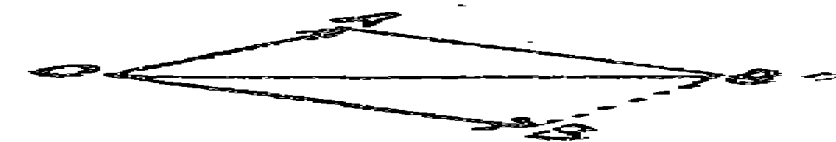
١٣٩ – برآیند یا مجموع هندسی چند بردار را باینطریق بدست میآورند : از نتهای اولی برداری همسنك دومی و از انتهای بردار جدید برداری همسنك سومی و از انتهای این یکی برداری همسنك چهارمی میکشند و عمل را ادامه میدهند تا همسنگهای تمام بردار های مفروض رسم شوند . آنگاه مبدأ اولین بردار را بمنتهای آخرین بردار وصل میکنند . این بردار برآیند یا منتجه یا مجموع هندسی بردارهای مفروض است . (ش ١١)

١٤٠ – تفاضل هندسی دو بردار که یك مبداء داشته باشند برداریست که منتهای آندو را بهم ربط دهد .

١٤١ – برآیند بردار های غیر واقع در یك صفحه نیز مانند بردارهای واقع در یك صفحه بدست میآید .

(ش ١١)

حالتهای خاص – ١) برآیند دو بردار که یك مبداء

داشته باشند قطر متوازی‌الاضلاعیست که بر روی آن دو ساخته شود . (ش ۱۲)

۲) برآیند سه بردار غیر واقع در یك صفحه که یك مبداء داشته باشند قطر متوازی‌السطوحی است که آن بردارها سه یال آن باشند (ش ۱۳)

ش ۱۳ ش ۱۲

تصاویر بردارها

۱٤۲ — تعریف — تصویر قائم نقطهٔ A بر یك خط یا یك صفحه موقع عمودی است که از نقطه بر خط یا صفحه فرود آید .

۱٤۳ — قضیه — تصویر برآیند چند بردار برآیند تصاویر آن بردارهاست .

IX موربات

۱٤٤ — قضیه منلائوس - رجوع شود بشماره ٦۰

۱٤٥ — قضیه سوا — » » ٦۱

۱٤٦ — قضیه پاسکال — در هر شش بر محاطی اضلاع مقابل دو بدو یکدیگر را در سه نقطه قطع میکنند که بر یك استقامتند

نتیجه — ۱) در پنج بر محاطی چهارضلع دو بدو متقاطعاً یکدیگر را دردو نقطه قطع میکنند که با نقطه تلاقی ضلع سوم با مماس بر رأس مقابلش بر یك استقامتند. ۲) درچهار بر محاطی محل تلاقی دو ضلع با دو نقطهٔ تلاقی دو ضلع دیگر با مماسهای بر رؤس مقابلشان بر یك استقامتند. ۳) در هر سه بر مماس بر دایره محیطی در هر رأس ضلع مقابل را قطع میکنند و سه نقطه تقاطع بر یك امتدادند. (ممکنست نقاط تقاطع بی نهایت دور باشند)

۱۴۷ – قضیه دالامبر — شماره ۱۷۲ دیده شود.

× تقسیم توافقی

۱۴۸ — قضیه — درهر روی هر خط فقط دو نقطه M و M' میتوان یافت که قدرمطلق نسبت فواصل آنها از دو نقطه ثابت A و B واقع بر آن خط مساوی عدد ثابت k باشد.

نتیجه — بادرنظر گرفتن علامت جبری درروی هرخط فقط یك نقطه میتوان یافت که نسبت فواصل آن از A و B مساوی مقدار ثابت جبری k باشد.

پس

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{M'A}{M'B}$$

میگریند M و M' قطعه AB (و B و A قطعه MM') را بنسبت توافقی k تقسیم کرده اند.

۱) اگر O وسط AB باشد: $AO^2 = OM.OM'$

۲) $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AM'} = \frac{2}{AB}$

۱۵۰ — **تعریف** — اگر چهار نقطه A و B و C و D خطی را بنسبت توافقی تقسیم کنند و از یك نقطه O بآن چهار نقطه وصل کنیم $O-ABCD$ را یك **دسته اشعه توافقی** و هر یك از خطوط OA و … را یك شعاع توافقی مینامند.

۱۵۱ — **قضیه** — هر خط که موازی یك شعاع توافقی باشد بوسیله سه شعاع دیگر بدو جزء مساوی تقسیم میشود.

۱۵۲ **قضیه** — هر خط که یك دسته اشعهٔ توافقی را قطع کند بهمین نسبت توافقی تقسیم میشود.

XI تقارن

۱ — تقارن مرکزی

۱۵۳ — ۱) قرینه هر نقطه M نسبت بنقطه O نقطه M' است که با O و M بر یك امتداد بوده و $OM = OM'$ باشد. O را مرکز تقارن میگویند. ۲) قرینه هر شکل نسبت بمرکز O شکلی است که هر نقطه‌اش قرینه یك نقطه از شکل اول باشد.

۱۵۴ — **قضیه** — ۱) قرینهٔ مرکزی هر قطعه خط موازی و مساوی و در جهت مخالف آنست. ۲) قرینه مرکزی هر زاویه مساوی و در جهت موافق آنست. ۳) قرینه مرکزی هر شکل (چند بر) شکلی (چند بری) مشابه آنست.

۱۵۵ — مرکز تقارن یك شکل — اگر در شکلی نقطه ای بتوان یافت که قرینه هر نقطهٔ شکل نسبت بآن همچنان بر شکل واقع شود آن نقطه را مرکز تقارن شکل میگویند، مانند مرکز دایره و محل تلاقی دو قطر متوازی‌الاضلاع،

۳ — تقارن محوری

۱۵۶ — تعریف — ۱) قرینهٔ یك نقطه نسبت بخط △ نقطهٔ M' است که با M بر روی خطی عمود بر △ بوده و فاصله آن از △ مساوی فاصله M از این خط باشد. △ را محور تقارن گویند. ۲) قرینه محوری هر شکل نسبت بمحور △ شکلی است که هر نقطه اش قرینه یك نقطه از شکل اول باشد،

۱۵۷ — قضیه — ۱) قرینه محوری هر قطعه خط قطعه خطی است مساوی آن که امتدادش محور را با امتداد آن در یك نقطه قطع میکند. ۲) قرینه محوری هر زاویه زاویه‌ایست مساوی و در جهت مخالف آن. ۳) قرینه محوری هر شکل شکلی است مساوی آن ولی غیر قابل انطباق بر آن.

۱۵۸ — محور تقارن هر شکل (در صورت وجود) خطیست که قرینه هر نقطه از شکل نسبت بآن همچنان بر شکل واقع شود. مانند قطر دایره و قطر لوزی.

۱۵۹ — قضیه — اگر شکلی دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد محل تلاقی آن دو محور مرکز تقارن شکل است.

XII تشابه

۱۶۰ — تعریف - دوشکل را مشابه یا همانند گویند وقتی که زوایای متناظرشان متساوی و اضلاع متناظرشان متناسب باشند .

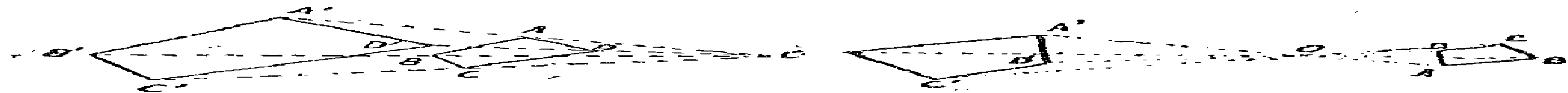
۱۶۱ - برای تشابه در مثلث رجوع شود بشماره های ۴ تا ۴۳

۱۶۲ — قضیه - خطوط موازی بر روی دو خط غیر مشخص قطعات متناسب جدا میکنند .

۱۶۳ - قضیه - در دو شکل مشابه مساحات بر نسبت مربعات دو خط متناظر میباشند .

۱۶۴ - قضیه - همواره دو چند بر مشابه را میتوان بیک عده مثلثهای متشابه و متشابه الوضع تجزیه کرد .

XIII تجانس

۱۶۵ - تعریف - دو شکل F و F' را متجانس هم گویند وقتی که هر دو نقطهٔ متناظر M و M' آنها با نقطه ثابت O ، موسوم به مرکز تجانس ، بر یک امتداد بوده و نسبت $\frac{MO}{M'O}$ مساوی مقدار ثابت k ، موسوم به نسبت تجانس ، باشد . اگر F و F' دریک طرف O باشند $k > ۰$ و تجانس مستقیم است (ش ۱۴) واگر در دو طرف O باشند $k < ۰$ است و تجانس معکوس (ش ۱۵)

ش ۱۵ ش ۱٤

۱٦٦ قضیه — شرط لازم و کافی برای آنکه دو شکل مجانس باشند اینست که هر دو خط متناظر متوازی بوده نسبتشان مساوی نسبت تجانس باشد.

۱٦۷ – قضیه — مجانس خط مستقیم خطی است مستقیم.

۱٦۸ – قضیه — مجانس دایره دایره است.

۱٦۹ – قضیه — دو دایره در عین حال مجانس مستقیم و معکوس یکدیگرند.

۱۷۰ – قضیه — مماسهای بر نقاط متناظر در دو منحنی متجانس با یکدیگر موازیند.

۱۷۱ – قضیه — دو شکل F' و F'' که مجانس شکل سوم F باشند مجانس یکدیگرند و سه مرکز تجانس آنها بر روی یك خط مستقیم واقعند.

۱۷۲ – قضیه دالامبر — سه دایره دو بدو دارای شش مرکز تجانسند. ۱) سه مرکز تجانس مستقیم بر یك امتدادند. ۲) هر مرکز تجانس مستقیم با دو مرکز تجانس معکوس بر یك استقامتند.

XIV تغییر مکان در سطح

۱۷۳ – تعریف – هرگاه برطبق قاعده مشخص و معینی بازاء هر نقطه M از شکل F نقطه‌ای مانند M′ در صفحهٔ شکل بدست آوریم شکل F′ حادث از مجموع نقاط M′ را میگویند از تغییر مکان F حاصل شده است و آنرا مبدل یا تبدیل یافته F میگویند .

تغییر مکان ممکنست در اجزاء شکل تغییر دهد ، مانند تجانس ؛ یا در آنها تغییری ندهد ، مانند انتقال و دوران. دراین نوع تغییر مکانها تبدیل یافتهٔ شکل بوسیله یك لغزش درروی صفحه میتواند برشکل اصلی منطبق شود .

۱۷۴ – قضیه – در تغییر مکانهائی که در آنها شکل تغییر نمیکند وضع جدید دو نقطه برای مشخص کردن وضع جدید شکل کافیست .

انتقال

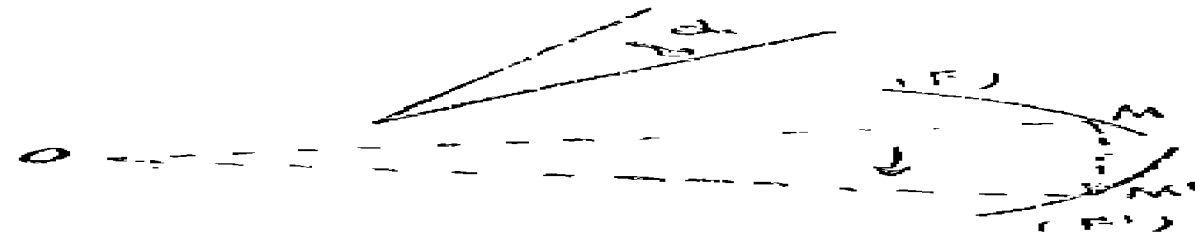
۱۷۵ – هرگاه بردار (AB) مفروض باشد و بازاء هر نقطهٔ M از شکل F نقطهٔ M′ را بدست آوریم بطوریکه (MM′) همسنك (AB) باشد گوئیم شکل F′ ، حاصل ازمجموع نقاط M′ ، ازانتقال شکل F باندازهٔ (AB) بدست آمده است . بردار (AB) راکه نماینده و مشخص انتقال است بردار انتقال گویند .

۱۷۶ – قضیه – انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد .

۱۷۷ – قضیه – در انتقال دو بردار متناظر همسنك هستند. بعکس اگر در تغییر مکانی دو بردار متناظر همسنك باشند تغییر مکان انتقال است .

۱۷۸ – قضیه – تغییر مکان حاصل از چند انتقال ، انتقال است . بردار انتقال اخیر برآیند بردارهای انتقالهای مفروض است .

دوران

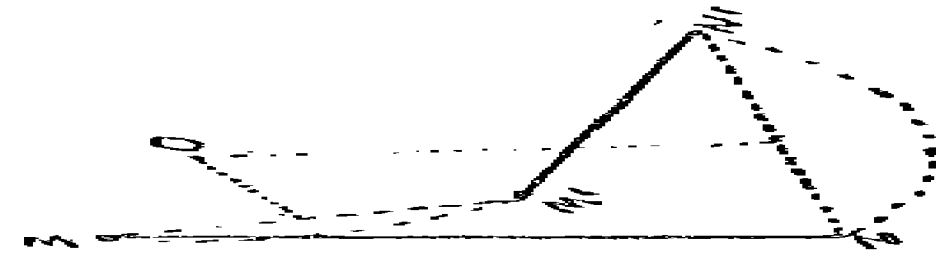
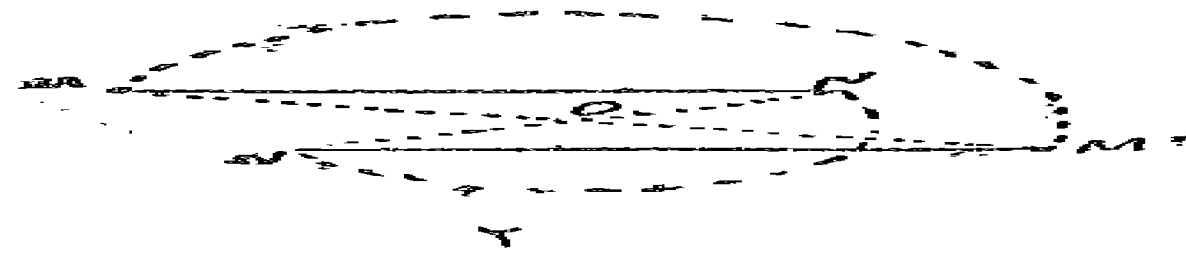
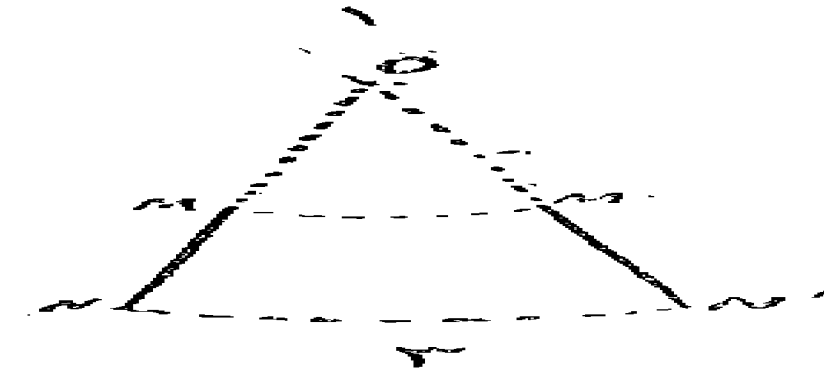
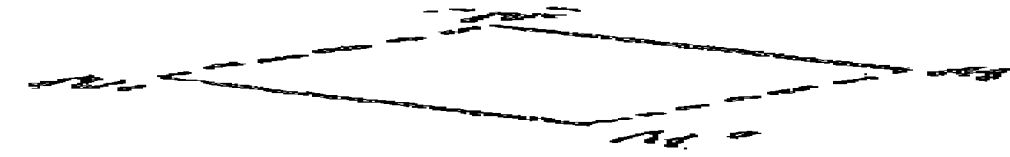
۱۷۹ – تعریف – هرگاه زاویه α و نقطه O (ش ۱۵) مفروض باشند و بازاء هر نقطهٔ M از شکل F نقطه M′ را چنان بدست آوریم که OM′=OM و α=M′OM باشد مجموع نقاط M′ شکل F′ را تشکیل میدهند . میگویند F′ از دوران F باندازهٔ α ودر جهت سهم بدست آمده است .

ش ۱۵

۱۸۰ – قضیه – دوران اجزاء شکل را تغییر نمیدهد .

۱۸۱ – قضیه – هر تغییر مکان در صفحه که در اجزاء شکل تغییر ندهد یك انتقال یا یك دوران خواهد بود . (ش ۱۶ ، ۱ و ۲ و ۳ و ٤) (در صفحه بعد)

XV خط و صفحه

۱۸۲ – صفحه نامحدود است و فضا را بدو ناحیه تقسیم

ش ۱۶

میکند . پس خطی که از یك ناحیه بناحیه دیگر برود ناچار صفحه را قطع میکند .

۱۸۳ ــ وضع خط نسبت بصفحه ــ خط ممکنست : ۱) درصفحه باشد . ۲) با صفحه موازی باشد . ۳) صفحه را قطع کند .

۱۸۴ ــ قضیه ــ بر یك خط و یك نقطه فقط یك صفحه میگذرد .

۱۸۵ ــ نتیجه ــ صفحه ممکنست بوسیلهٔ ۱) ۳ نقطه ، ۲) یك خط و یك نقطه ، ۳) دو خط متقاطع یا متوازی ،

مشخص شود .

۱۸٦ ــ وضع دو خط ــ دو خط ممکنست : ۱) در یك صفحه باشند ، در اینصورت یا متقاطعند یا متوازی . ۲) در یك صفحه نباشند (متنافر)

۱۸۷ ــ قضیه ــ از یك نقطه میتوان یك خط بموازات یك خط رسم کرد .

۱۸۸ ــ قضیه ــ اگر یکی از دو خط موازی صفحه‌ای را قطع کند ، دیگری نیز آن صفحه را قطع میکند .

۱۸۹ ــ قضیه ــ دو خط موازی با خط سوم با یکدیگر موازیند .

۱۹۰ ــ قضیه ــ خطی که موازی یك خط از صفحه‌ای باشد با صفحه موازیست.

نتیجه ــ از یك نقطه خطوط بیشمار بموازات یك صفحه رسم میشوند .

۱۹۱ ــ قضیه ــ اگر بر خط △ که موازی صفحه P است صفحه ای بگذرانیم فصل مشترك دو صفحه موازی △ است .

۱۹۲ ــ قضیه ــ خطی که موازی دو صفحه باشد بافصل مشترکشان موازیست .

۱۹۳ ــ قضیه ــ فصل مشترك دو صفحه که بر دو خط موازی بگذرند باآندو خط موازیست .

۱۹٤ ــ قضیه ــ فصل مشترك دو صفحه خطیست مستقیم.

۱۹۵ — قضیه — هرگاه سه صفحه یکدیگر را دو بدو قطع کنند سه فصل مشترك یا متقاربند یا متوازی.

۱۹۶ — قضیه — فصل مشترك هر صفحه با دو صفحهٔ متوازی دو خط متوازیند.

۱۹۷ — قضیه — از یك نقطه میتوان فقط یك صفحه بموازات صفحهٔ مفروض رسم کرد.

۱۹۸ — قضیه — دو صفحه موازی با یك صفحه با یکدیگر موازیند.

۱۹۹ — قضیه — از یك نقطه میتوان خطوط بیشمار موازی یك صفحه رسم کرد. مکان هندسی آنها صفحه ایست موازی صفحهٔ اول.

نتیجه — ۱) خطی که با یکی از دو صفحه متوازی موازی باشد با دیگری هم موازیست. ۲) خطی که یکی از دو صفحه متوازی را قطع کند، دیگری را هم قطع میکند.

۲۰۰ — قضیه — دو قطعه موازی هم محصور بین دو صفحه متوازی با یکدیگر برابرند.

۲۰۱ — قضیه — صفحات متوازی بر روی خطوط قطعات متناسب جدا میکنند.

۲۰۲ — تعریف — زاویه بین دو خط متنافر زاویه ایست که بین دو خط متقاطع متوازی با آنها حادث شود.

۲۰۳ — قضیه — دو زاویه که اضلاعشان موازی باشند متساویند.

۲۰۴ — تعریف — خطی را بر صفحه ای عمود گویند وقتی

که بر همه خطوط آن عمود باشد .

۲۰۵ - قضیه - خطی که بر دو خط از صفحه‌ای عمود باشد بر صفحه عمود است .

نتیجه - ۱) خطی که بر یکی از دو صفحه متوازی عمود باشد بر دیگری هم عمود است . ۲) اگر یکی از دو خط متوازی بر صفحه‌ای عمود باشد دیگری هم عمود است .

۲۰٦ - قضیه - از یک نقطه فقط یک صفحه عمود بر یک خط میتوان کشید .

نتیجه - ۱) دو صفحه عمود بر یک خط متوازیند . ۲) از یک نقطه و در فضا خطوط بیشمار عمود بر یک خط میتوان رسم کرد ، همه در یک صفحه‌اند .

۲۰۷ - قضیه - همه نقاط واقع بر صفحه‌ای که بر وسط قطعه خطی عمود باشد از دو انتهای قطعه بیک فاصله‌اند .

۲۰۸ - قضیه - از یک نقطه فقط میتوان یک خط بر صفحه عمود کرد .

نتیجه - دو خط عمود بر یک صفحه متوازیند .

۲۰۹ - قضیه سه عمود - اگر △ بر صفحه‌ای عمود باشد و از موقع آن در صفحه خطی عمود بر یک خط D واقع در صفحه رسم کنیم و موقع این عمود را M بنامیم ، خطوط واصل از M بنقاط مختلف △ همه بر D عمودند . و بعکس ...

۲۱۰ - قضیه - اگر از نقطه O یک عمود و چند مایل بر صفحه‌ای رسم کنیم : ۱) مواقع مایلهای متساوی از موقع عمود

بیك فاصله‌اند . و بعکس ... ۲) از دو مایل نامساوی موقع آنکه بزرگتر است از موقع عمود دور تر است . و بعکس . . .

۲۱۱ – تعریف ۱) فاصلهٔ نقطه از خط طول عمودیست که از آن نقطه بر آن خط فرود آید ۲) فاصله دو خط متنافر طول عمود مشترك آنهاست .

۲۱۲ – چند مسئلهٔ مهم – ۱) رسم عمود مشترك D و △ – بر △ صفحه‌ای موازی D میگذرانیم ، از یك نقطهٔ D خطی بر این صفحه عمود میکنیم ، از موقع عمود ′D را موازی D میکشیم تا △ را در نقطه O قطع کند . از O خطی موازی عمود رسم مینمائیم ، این خط عمود مشترك است ۲) باید از O خطی موازی صفحه P رسم کرد تا خط △ را قطع کند – بر O صفحه ای موازی P میکشیم تا △ را در M تلاقی کند . OM جواب مسئله است . ۳) باید خطی موازی D رسم کرد تا △ و ′△ را قطع کند — بر △ و ′△ دو صفحه موازی D میگذرانیم ، فصل مشترکشان جواب مسئله است . ٤) باید بر یك نقطه خطی گذراند که دو خط را قطع کند – بر آن نقطه و هر یك از دو خط صفحه‌ای مرور میدهیم فصل مشترکشان جواب مسئله است .

XVI فرجه‌ها

۲۱۳ – فضای محصور بین دو صفحه متقاطع را فرجه ؛ هر صفحه را یک روی فرجه ، فصل مشترك دو صفحه را یال ؛

زاویه حادث مابین فصل مشترکهای دوروی فرجه را با صفحه‌ای عمود بر یال مسطحه فرجه میگویند. صفحه منصف فرجه، فرجه های قائم، تند، باز، مجاور، مجانب، متمم، مکمل و جهت فرجه معانی الفاظ مشابه خود را در زوایا دارند.

۲۱۴ - قضیه - مسطحه‌های فرجه‌های متساوی متساویند.

۲۱۵ — قضیه - دو فرجه متساوی بر نسبت مسطحه‌های خود هستند.

نتیجه — ۱) مقیاس فرجه با مسطحهٔ آن یکی است.

۲۱۶ — قضیه — هر صفحه که بر یك خط از صفحه‌ای عمود باشد بر آن صفحه عمودست.

۲) برای اندازه گرفتن فرجه‌ها واحدهای زوایا بکار میرود.

۲۱۷ - قضیه - فصل مشترك دو صفحهٔ عمود بر صفحه سوم بر این صفحه عمودست.

نتیجه - صفحه‌ای که بر فصل مشترك دو صفحه عمود باشد بر آنها عمود است.

۲۱۸ — هرگاه اضلاع زاویه‌ای بر دو روی فرجه‌ای عمود باشند آن زاویه مکمل فرجه است.

تصویر بر صفحه

۲۱۹ - تصویر نقطه موقع عمودیست که از نقطه بر صفحه فرود آید.

تصویر یك شکل حادث از مجموع تصاویر نقاط مختلف آنست.

۲۲۰ — قضیه — تصویر خط مستقیم خطیست مستقیم.

۲۲۱ — قضیه — تصاویر خطوط متوازی متوازیند.

۲۲۲ – قضیه – ۱) اگر یک ضلع زاویه قائمه ای با صفحهٔ تصویر موازی باشد تصویر آن هم قائمه است – ۲) اگر تصویر زاویه‌ای که یک ضلعش با صفحه تصویر موازیست قائمه باشد اقلا یک ضلع آن باصفحه تصویر موازیست .

۲۲۳ – میل خط نسبت بیک صفحه زاویه بین خط و تصویرش بر آن صفحه است . شیب خط ظل (تانژانت) میل آن میباشد .

۲۲۴ – قضیه – میل خط کوچکترین زاویه بین آنخط و خطوط صفحه است .

۲۲۵ – قضیه – مسطحهٔ یک فرجه بزرگترین زاویه ایست که اضلاعش بترتیب در دوروی فرجه واقعند .

تعریف – خطی را که در یک روی فرجه عمود بریال رسم شود خط بزرگترین شیب آنصفحه نسبت بروی دیگر فرجه گویند .

۲۲۶ – قضیه – ۱) طول تصویر خط مساویست با طول خودآن ضرب درجیب تمام میلش . ۲) مساحت تصویر یک شکل مسطح مساویست با حاصل ضرب مساحت آن شکل در جیب تمام زاویه حادث بین صفحهٔ شکل و صفحهٔ تصویر .

XVII تقارن درفضا

۲۲۷ – تقارن نسبت بیک نقطه – M' را قرینهٔ M نسبت بمرکز تقارن O گویند وقتی که O وسط MM' باشد .

۲۲۸ – تقارن نسبت بیک خط – M' را قرینه M

نسبت بمحور تقارن △ گویند وقتی که △ درصفحه‌ای عمود بروسط MM' باشد .

رجوع شود به تقارن درصفحه (شماره های ۱۵۳ تا ۱۵۹)

۲۲۹ — تقارن نسبت بیك صفحه – M' را قرینه M نسبت بصفحه P گویند وقتی که P بروسط MM' عمود باشد .

۲۳۰ — دو شکل نسبت بیك مرکز ، یك محور یا یك صفحه قرینه یکدیگرند وقتی که جمیع نقاط یکی قرینه نقاط دیگری باشد . اگر درشکلی نقطه ای ، خطی یاصفحه ای بتوان یافت که قرینهٔ هر نقطه شکل نسبت بآن نقطه ، خط یا صفحه همچنان بر خود شکل واقع گردد آنهارا مرکز یا محور یا سطح تقارن شکل گویند .

۲۳۱ — هرگاه اجزاء شکلی را بتوان بر اجزاء شکل دیگری که مساوی آنست منطبق نمود دو شکل مساوی وقابل انطباق هستند والا مساویند اما انطباق ناپذیر .

۲۳۲ — قضیه — ۱) دوقرینه یك شکل نسبت به یك صفحه و یك نقطه از آن صفحه قابل انطباقند — ۲) دو قرینهٔ یك شکل نسبت بدومرکز قابل انطباقند – ۳) قرینه های یك شکل نسبت بیك صفحه و یك مرکز قابل انطباقند – ٤) همچنین قرینه های یك شکل نسبت بدو صفحه – ٥ قرینهٔ مرکزی یك جسم ممکنست بر آن قابل انطباق باشد یا نباشد – ٦) قرینه های یك جسم نسبت بیك محور یا یك صفحه بر خود جسم قابل انطباق هستند .

۲۳۳ – قضیه – ۱) قرینه هر شکل مستوی نسبت بیك مرکز ، یك محور یا یك صفحه با خود آن شکل مساویست – ۲) قرینه یك صفحه ، صفحه است ۳) قرینه هر فرجه نسبت بیك صفحه فرجه‌ایست مساوی با آن اما درجهت مخالف .

۲۳٤ – قضیه – ۱) اگر شکلی دوصفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یك محور تقارن (فصل مشترك دوصفحه) است – ۲) اگر شکلی سه صفحه تقارن عمود برهم داشته باشد دارای یك مرکز تقارن (نقطهٔ مشترك سه صفحه) نیز هست .

XVIII – تجانس در فضا

۲۳۵ – تعریف – هرگاه نقطه O بنام مرکز تجانس و عدد λ بنام نسبت تجانس داده شده باشند مجانس هر شکل F نسبت به O شکل F' است بطوریکه هردو نقطه متناظر M و M' از آنها با O بریك امتداد باشند و $\lambda = \frac{OM'}{OM}$ باشد.
هرگاه M و M' در یك طرف O باشند (λ مثبت باشد) F' مجانس مستقیم F و اگر M و M' در دوطرف O باشند (λ منفی باشد) مجانس معکوس آن میباشد .

۲۳٦ – قضیه – ۱) مجانس یك قطعه خط خطی موازی آنست که اگر مجانس مستقیم باشد با آن در یك جهت است و اگر معکوس باشد درجهت مخالف .
۲) زاویهٔ بین دو خط مساوی زاویهٔ بین مجانسهای آنهاست .

۳) مجانس خطی که برمرکز بگذرد بر خود آن خط منطبق است .

٤) مجانس صفحهٔ مستوی صفحه مستویست .

۲۳۷ – قضیه – ۱) مساحات دو شکل مجانس بر نسبت مربع دو یال متناظر آنهاست .

۲) حجمهای دو شکل مجانس بر نسبت مکعب دو یال متناظر آنهاست .

۲۳۸ – قضیه – هرگاه شکل F مرکز تقارن داشته باشد مجانس آن ′F نیز مرکز تقارنی خواهد داشت . در اینصورت F و ′F در عین حال مجانس مستقیم و مجانس معکوس یکدیگر ند و اگر مراکز تقارن آنها را C و ′C و مراکز تجانس مستقیم و معکوسشان O و ′O و نسبت تجانس را λ بنامیم :

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{O'C'}{O'C} = \lambda$$

۲۳۹ – قضیه – اگر ′F و ″F مجانسهای F با نسبتهای λ و ′λ باشند مجانسهای یکدیگر با نسبت $\frac{\lambda'}{\lambda}$ نیز هستند .

۲٤۰ – قضیه – ۱) اگر سه شکل دو بدو متجانس باشند سه مرکز تجانس بر یك خط بنام محور تجانس واقعند .

۲) اگر چهار شکل دو بدو متجانس باشند شش مرکز تجانس در یك صفحه ، بنام صفحهٔ تجانس ، واقعند . چون هر سه شکل از این چهار شکل یك محور تجانس دارند چهار شکل چهار محور تجانس خواهند داشت که اضلاع یك چهار بر کاملند و رؤس چهار بر کامل شش مرکز تجانس چهار شکل میباشند .

تبصره – اگر چهار شکل که مرکز تقارن دارند دو بدو متجانس یکدیگر باشند هر دسته سه تائی آنها چهار محور تجانس (یك محور تجانس مستقیم و سه محور تجانس معکوس) دارند ؛ پس دستگاه چهار شکل شانزده محور تجانس دارند که چهار بچهار در هشت صفحهٔ مشخص واقع میباشند .

XIX – تشابه در فضا

۲٤۱ – جسمی را مشابه جسم دیگر گویند که با متجانس مستقیم آن مساوی باشد . نسبت دو یال متناظر را نسبت تشابه مینامند .

۲٤۲ – قضیه – در دو جسم متشابه : ۱) فرجه های متناظر با هم برابرند ؛ ۲) یالهای متناظر بر یك نسبتند ؛ ۳) وجوه متناظر چندبر های متشابهند .

۲٤۳ قضیه – دو چند روی متشابه را میتوان همواره بچند چهار وجهی متشابه و متشابه‌الوضع تجزیه نمود .

۲٤٤ – قضیه – نسبت مساحات دو جسم مشابه مساوی نسبت مربع اضلاع متناظر و نسبت حجمهایشان مساوی نسبت مکعب اضلاع متناظرشان میباشد .

XX – تغییر مکان در فضا

رجوع شود بشماره های ۱۷۳ تا ۱۸۱

۱ ـ انتقال

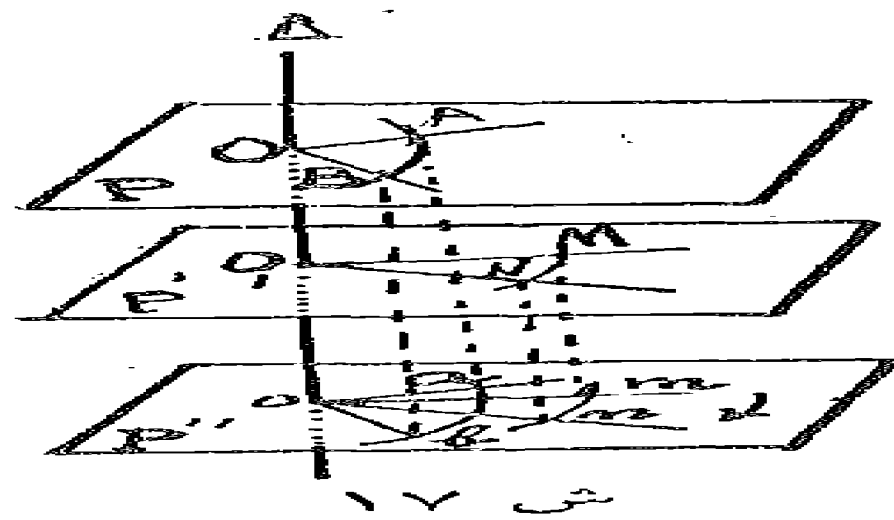
۲٤۵ ـ قضیه ـ اگر در تغییر مکان در فضا سه نقطه غیر واقع بر یك امتداد جسمی بر روی سه خط موازی و مساوی و بیکجهت تغییر مکان دهند جسم حرکت انتقالی کرده است و بردار انتقال مساوی و در جهت تغییر مکان یکی از آن سه نقطه است.

نتیجه ـ انتقال در اجزاء شکل تغییر نمیدهد.

۲٤٦ ـ چند انتقال را در فضا میتوان بیك انتقال تبدیل کرد. بردار این انتقال مساوی برآیند بردار های انتقالهای جزء میباشد.

۲ ـ دوران

ش ۱۷

۲٤۷ ـ تعریف ـ اگر سه صفحه موازی p و p′ و p′′ (ش ۱۷) فرض نمائیم: ۱) دو زاویه AOB و N و MO۱ که در دو صفحه p و P′ واقعند و رؤسشان بر روی خط OO۱ عمود بر صفحات قرار دارند، در یك جهت هستند اگر تصاویر شان بر روی صفحه p′′ در یك جهت باشند ـ ۲) و نیز دو قوس واقع در صفحات p و p′ که مراکز شان در روی خطی عمود بر صفحات باشد در

یك جهتند وقتی تصاویر شان بر روی P'' در یك جهت باشند .

۲۴۸ – قضیه – هرگاه شکلی حول محوری دوران کند تصاویر تمام نقاط آن بر روی صفحه عمود بر محور در یك جهت و بزوایای متساوی دوران مینمایند .

۲۴۹ – قضیه – هرگاه شکلی در فضا تغییر مکان دهد بطوریکه سه نقطه غیر واقع بر یك امتداد آن بر روی سه صفحه متوازی سه قوس متساوی و در یك جهت بپیمایند و مراکز سه قوس در روی خطی عمود بر این صفحات واقع باشند شکل در فضا دوران کرده است و خطی که بر مراکز قوسها میگذرد محور دوران است .

۳ – حرکت مارپیچی

۲۵۰ – قضیه – هر تغییر مکان هر شکلی که بروی کره رسم شده باشد ممکن است تبدیل بدوران در حول یکی از قطر های کره شود .

۲۵۱ – قضیه – هر تغییر مکان در فضا که در اجزاء شکل تغییر ندهد منجر بیك انتقال و یك دوران میشود .

۲۵۲ – تعریف – هر تغییر مکان را که منجر بیك دوران و یك انتقال بموازات محور دوران شود حرکت مارپیچی مینامند .

XXI چندروها ، منشور ، هرم

۲۵۳ – تعریف – چندرو یا کثیرالوجوه جسمی است که از هر طرف بسطوح مستوی محدود شده باشد . قسمتی از

هر صفحه محدود بحدود جسم را یک **رو** یا **فرجه**، فصل مشترک دو رو را **یال**، فصل مشترک دو یال را **راس**، فرجه بین هر دو رو را یک **فرجه** جسم میگویند. چند روی **گوژ** آنست که مقطع هر صفحه در آن چند بر گوژ باشد. چندروی منتظم آنست که همه روهایش باهم وهمه فرجه‌هایش باهم مساوی باشند. چندروهای منتظم را **اجسام افلاطونی** میگویند.

۲۵٤ – **قضیهٔ اولر** – اگر s عده روس، a عدهٔ یالها و f عدهٔ روهای یک چند روی گوژ باشند ۲ + a = s + f

۲۵۵ – **قضیه** – اجسام افلاطونی منحصر به پنج هستند: چهارروی منتظم (٤ راس و ٦ یال)، هشت رو (٦ راس و ۱۲ یال)، بیست رو (۱۲ راس و ۳۰ یال) [. در این سه جسم هر رو سه بر است]؛ مکعب که هر روی آن مربع است و ۸ راس و ۱۲ یال دارد؛ دوازده رو که هر روی آن پنج بر است و ۲۰ راس و ۳۰ یال دارد.

۲۵٦ – **تعریف** – **سطح منشوری** آنست که از تغییر مکان خطی بنام مولد که همواره بموازات خود تغییر مکان دهد و بر یک چندبر متکی باشد پدید آید. **منشور** قسمتی از فضا محصور بین یک سطح منشور ودو صفحه مستوی است، اگر صفحه‌ها موازی نباشند منشور **ناقص**، اگر صفحه ها بر مولد عمود باشند منشور **قائم** است. مقطع هر صفحه عمود بر مولد منشور را **مقطع قائم** گویند.

سطح هرم سطحی است که از تغییر مکان خطی بنام مولد که همواره بر نقطه ثابتی بگذرد و بر محیط چند بری

متکی باشد بدید آید. قسمتی ازفضا محصور بین چنین سطحی
بایك صفحه مستوی را هرم میگویند . درهرم منتظم همه روها
سه برهای متساوی الساقین متساویند .

هرم ناقص ازقطع کردن یك هرم بایك صفحه بدید میآید.
درهرم منتظم ارتفاع هرسه بر جانبی ودرهرم ناقص منتظم ارتفاع
هر ذوزنقه جانبی را سهم میگویند .

۲۵۷ - قضیه — فصل مشترك صفحات متوازی باسطح
منشوری چند برهای متساویند .

۲۵۸ - قضیه — سطح بدن منشور مساویست بحاصلضرب
محیط مقطع قائم در یال .

۲۵۹ - قضیه - هرگاه سه روی یکی از کنجهای منشوری
باسه روی یکی از کنجهای منشور دیگر متساوی ومتشابه الوضع
باشند دو جسم متساویند .

۲۶۰ - قضیه - ۱) در متوازی السطوح : رو های مقابل
موازی و مساوی یکدیگرند . ۲) چهار قطر یکدیگر را در
یك نقطه قطع میکنند . ۳) این نقطه مرکز تقارن جسم
است .

۲۶۱ - قضیه — هر منشور مایل معادل منشور قائمی
است که قاعده اش مقطع قائم و ارتفاعش یال آن باشد .

۲۶۲ - قضیه — ۱) حجم دو مکعب مستطیل که یك یال
مشترك داشته باشند بر نسبت حاصلضرب دو یال دیگر است .
۲) حجم دو مکعب مستطیل که دو یال مشترك داشته باشند بر
نسبت یال سوم است .

۲۶۳ - **قضیه** — ۱) حجم مکعب مستطیل مساویست به حاصلضرب سه یال آن ؛ ۲) حجم متوازی السطوح مساویست به حاصلضرب قاعده در ارتفاع ؛ ۳) بطور کلی حجم منشور مساویست بحاصلضرب مقطع قائم در یال (قاعده در ارتفاع).

۲۶۴ - **قضیه** — در هرم منتظم همه روها باهم برابرند.

۲۶۵ - **قضیه** — هرگاه صفحه‌ای هرم را موازی قاعده قطع کند : ۱) یالها و ارتفاع هرم همه بیك نسبت قطع میشوند ؛ ۲) مقطع مشابه قاعده است ؛ ۳) نسبت سطح مقطع بسطح قاعده مساوی نسبت مربع دو ضلع متناظر است.

۲۶۶ - **قضیه** — دو هرم که قاعده‌هایشان معادل و ارتفاعشان مساوی باشد معادل یکدیگرند.

۲۶۷ - **قضیه** — هرم سه پهلو $\frac{1}{3}$ منشور سه پهلوئی است که بهمان قاعده و ارتفاع باشد.

نتیجه — حجم هرم مساویست بحاصلضرب قاعده در $\frac{1}{3}$ ارتفاع

۲۶۸ - **قضیه** — حجم هرم ناقص بقاعده های B و b و ارتفاع h مساوی $\frac{h}{3}(B+b+\sqrt{Bb})$ است.

۲۶۹ - **قضیه** — حجم منشور ناقص سه پهلو مساویست بحاصلضرب قاعده در $\frac{1}{3}$ مجموع سه یال.

۲۷۰ - **قضیه** — حجم منشور ناقص قائمی که قاعدهٔ آن چندبر منتظم n ضلعی باشد مساویست بحاصلضرب قاعده در طول محور، یعنی خطی که مرکز های دو قاعده را بهم مربوط میکند.

۲۷۱ - **تعریف** - **شبه منشور** جسمی است که دو قاعده آن دو چند بر متوازی و هر یك از وجوه جانبی آن سه بر یا ذوزنقه باشد مقطع صفحه ایرا که بیك فاصله از دو قاعده باشد **مقطع متوسط** گویند.

۲۷۲ - **قضیه** - حجم شبه منشور مساوی است بحاصل ضرب $\frac{1}{6}$ ارتفاع آن در دو قاعده بعلاوه چهار برابر مقطع متوسط

$$V = \frac{h}{6}(B + b + 4m)$$

XXII استوانه ، مخروط ، کره

۲۷۳ - **تعریف** - **سطح دوار** از دوران یك خط (راست یا خم) تغییر ناپذیر در حول مستقیمی بنام محور پدید میآید. **جسم دوار** بیك سطح دوار محدود است. **مدار** دایره ایست از سطح دوار که صفحه اش بر محور عمود و مرکزش بر محور منطبق باشد. **نصف النهار** مقطع سطح دوار است با هر صفحه که بر محور بگذرد. **مماس** بر سطح دوار خطیست که بر یك منحنی مرسوم بر روی سطح دوار مماس باشد. **صفحه مماس** بر هر نقطه از سطح دوار مکان هندسی مماسهائیست که از آن نقطه بر خطوط مختلف مرسوم در سطح دوار رسم شوند. **قائم** بر سطح دوار در هر نقطه بر صفحهٔ مماس عمود است.

سطح استوانی از حرکت مولد بموازات خود و متکی بر یك منحنی **هادی** بوجود میآید. **سطح مخروطی** از تغییر مکان خطی که همواره بر نقطهٔ ثابتی گذشته بر منحنی هادی متکی باشد پدید میگردد.

سطح کروی آنست که جمیع نقاطش از نقطه‌ای بنام مرکز بفاصله R باشند. **کره** جسمیست محدود بسطح کروی. **دایره بزرگ** مقطع کره است باصفحه‌ای که برمرکز آن بگذرد. مقطع صفحات دیگر **دایره کوچک** میباشد. **فاصله کروی** دو نقطهٔ واقع برروی کره قوسی است از دایره بزرگی که بر آن دو نقطه بگذرد. **منطقه** قسمتی از سطح کره است محصور بین دوصفحه موازی، فاصله این دو صفحه ارتفاع منطقه است. **عرقیه** یا **عرقچین** منطقه ایست که یك صفحهٔ آن بر کره مماس باشد. **قطعه کروی** قسمتی از کره محصور بین دوصفحهٔ موازیست. **قاچ** قسمتی از سطح کره محصور بین دو نیمدایرهٔ بزرك است. **زاویهٔ قاچ** عبارتست از زاویه بین دو مماس که از نقطه برخورد دو نیمدایره بر آنها رسم شود. **قوس قاچ** قوسی از دایره بزرگیست که بر فصل مشترك دو نیمدایره قاچ عمود و بآنها محدود باشد. **اکلیل کروی** قسمتی از حجم کره محصور بین دو نیمدایره بزرك است. **قطاع کروی** جسمیست که از دوران یك قطاع دایره حول قطری از دایره پدید آید. **حلقه کروی** جسمیست که از دوران یك قطعه دایره حول قطری از کره تولید شود.

۲۷۴ - **قضیه** - همه نصف النهارهای یك سطح دوار با هم مساویند.

۲۷۵ - **قضیه** - ۱) مماسهای بریك نقطه از سطح دوار همه در یك صفحه اند بنام صفحه مماس ۲) قائم بر هر نقطه از سطح دوار بامحور موازیست یا آنرا قطع میکنند.

۲۷۶ - استوانه
۱ - دو قاعده استوانه باهم مساویند .
۲ - صفحه مماس بر استوانه بر یکی از مولدهای آن میگذرد .
۳ - استوانه حد منشور محیطی یا محاطی خود میباشد .
۴ - سطح بدن استوانه قائم مساویست با حاصلضرب محیط قاعده در ارتفاع .
۵ - جسم استوانه قائم مساویست با حاصلضرب قاعده در ارتفاع .
۶ - سطح بدن (حجم) استوانه مایل مساویست بحاصلضرب محیط (سطح) مقطع قائم آن در مولد .
۷ - در استوانه ناقص مستدیر قائم سطح بدن (حجم) مساویست بحاصلضرب محیط قاعده (سطح قاعده) در محور جسم [یعنی خطی که از مرکز قاعده موازی مولد رسم شود] .
۸ - مقطع استوانه مستدیر با هر صفحه که موازی قاعده باشد دایره و با هر صفحه دیگر بیضی است ،
۲۷۷ - مخروط
۱ - مقطع مخروط مستدیر با هر صفحه که باقاعده موازی باشد دایره ، با هر صفحه که موازی قاعده یا یك مولد نباشد بیضی ، باهر صفحه که موازی یك مولد باشد سهمی و با هر صفحه که مخروط و امتداد آنرا در آنطرف رأس قطع کند هذلولی میباشد (رجوع شود بمخروطات) .
۲ - صفحه مماس بر مخروط بر یك مولد آن میگذرد .

۳- مخروط حد هرم محیطی و محاطی خود میباشد.

٤- سطح بدن مخروط مساویست بحاصلضرب محیط قاعده در نصف سهم.

٥- حجم مخروط مساویست بحاصلضرب سطح قاعده در ثلث ارتفاع.

٦- مخروط ناقص حد هرم ناقص محیطی و محاطی خود میباشد.

۷- اگر شعاعهای دو قاعده مخروط ناقص را R و r، سهم آنرا l و ارتفاعش را h فرض کنیم:

$$\text{حجم} = \pi \frac{h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\text{سطح بدن} = \pi l (R + r) \qquad \text{سطح کل} = \pi [R^2 + l(R + r)]$$

۲۷۸ - کره

۱ - مقطع هر صفحه در کره دایره ایست که مرکزش موقع عمودیست که از مرکز کره بر صفحه قاطع فرود آید. اگر شعاع کره R، شعاع دایره مقطع r و فاصله این صفحه از مرکز کره d فرض شوند:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

۲- هر خط کره را فقط در دو نقطه قطع میکند.

۳- قطر عمود بر سطح هر دایرهٔ کره، جسم را در دو نقطه P و p قطع میکند که دو قطب دایره نام دارند. جمیع نقاط هر دایره از هر یك از دو قطب بیك فاصله‌اند.

٤- در یك کره دایره‌های متساوی از مرکز بیك فاصله‌اند و بعکس.

۵- در یك کره از دایره‌های نامساوی آنکه بزرگتر است بمرکز نزدیکتر است و بعکس.

۶- صفحه مماس بر کره با آن فقط یك نقطه مشترك دارد و بر شعاع نقطهٔ تماس عمود است.

۷- بر یك چهار روی منتظم میتوان یك کره محیط و در آن یك کره محاط کرد. اگر یال آنرا a بنامیم:

$\frac{a\sqrt{6}}{4}$ = شعاع کره محیطی ؛ $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ = شعاع کره محاطی

۸- کوتاه‌ترین راه بین دو نقطه واقع بر روی کره قوسی است از دایره بزرگ.

۹- **برای تعیین شعاع کره** باین راه عمل میکنیم: دو نقطه M و N از سطح کره را مرکز قرار داده با فاصله‌های قطبی اختیاری قوسهائی (دو بدو باشعاعهای متساوی) رسم میکنیم تا از برخورد آنها سه نقطه A و B و C (که واقعند بر محیط یك دایره بزرگ) بدست آیند. با پرگار گروی طولهای AB و AC و BC را بر روی صفحه کاغذ نقل میکنیم و با این سه طول مثلثی میسازیم. دایرهٔ محیطی این مثلث مساوی دایرهٔ بزرگ از کرهٔ مفروض و شعاعش مساوی شعاع کره است.

۱۰- مساحت سطح حادث از دوران قطعه خط راستی در حول محوری که با آن در یك صفحه باشد مساوی است بحاصلضرب تصویر قطعه خط بر محور در محیط دایره‌ای که شعاع آن عمودی باشد که بر وسط قطعه خط اخراج و بمحور محدود گردد.

۱۱- حجم حادث از دوران مثلثی حول محوری که در

صفحهٔ آنست و بر یك رأس آن میگذرد و ضلع مقابل بآن راس را قطع نمیکند مساویست بحاصلضرب سطح حادث از دوران ضلع مقابل در $\frac{1}{3}$ ارتفاع وارد بر این ضلع .

۱۲ – سطح کره مساویست به $4\pi R^2$

۱۳ – حجم « « « $\frac{\pi}{6} d^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$

۱٤ – اگر دو صفحه موازی بفاصله h کره‌ای بشعاع R را قطع ودر آن دو دایره بشعاعهای r و r' ایجاد کنند :

سطح منطقه حادث $= 2\pi Rh$

حجم قطعه کروی حادث $= \frac{\pi}{6} h^3 + \frac{\pi}{2}(r^2 + r'^2) h$

حجم قطاع کروی $= 2\pi Rh \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

۱٥ — اندازه زاویه قاچ قوس مقابل قاچ است.

۱٦ — اگر قوس قاچ را α فرض کنیم در کره ای بشعاع R :

سطح قاچ $= 4\pi R^2 \frac{\alpha}{360} = \pi R^2 \frac{\alpha}{90}$

حجم اکلیل $= \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\alpha}{360} = \pi R^3 \frac{\alpha}{270}$

۱۷ – حجم حلقه کروی حادث از دوران قطعه دایره‌ای حول یك قطر دایره مساویست با نصف حجم مخروطی که شعاع قاعده‌اش وتر قطعه دایره وارتفاعش تصویر این وتر بر محور دوران باشد . پس اگر قطعه را AB و طول تصویر

آنرا A'B' فرض کنیم :

$$\text{حجم حلقه} = \frac{\pi}{6} AB^2 . A'B'$$

XX سه بر کروی

۲۷۹ - **تعریف** - **چند بر کروی** قسمتی است از سطح کره محدود بچند قوس از دوایر بزرگ .

(ش ۱۸) هر یك از قوسهای دایره بزرگ مانند AB را یك پهلو ، نقطه تلاقی دو پهلو را یك راس و گوشه بین هر دو پهلو را یك گوشه چند بر کروی گویند . پس پهلوهای چند بر کروی را هم با آحاد قوس وزاویه اندازه میگیرند .

کنج نظیر یك چند بر کروی آنست که راسش مرکز کره و یالهای آن منتهی بر وس چند بر باشند .

سه بر کروی ساده ترین چند بر هاست .

سه بر قرینه سه بر مفروض آنست که روسش انتهای اقطار میباشد که بر روس سه بر مفروض بگذرند . سه بر کروی ممکنست سه گوشهٔ راست یا باز داشته باشد . **سه بر قطبی** سه بر آنست که هر راس سه بر مفروض قطب یك ضلع آن باشد .

۹ ۰ درجه کروی سه بری است که دو پهلوی آن ۹۰ و یك پهلویش ۱ درجه باشد . اگر از مجموع زوایای یك سه بر کروی ۲ قائمه کم کنیم تفاضل را **فضل کروی** آن سه بر گویند .

۲۸۰ – قضیه – پهلوهای چندبر کروی مساوی‌روهای کنج نظیرش و گوشه های آن مساوی فرجه های اینست .

۲۸۱ – قضیه – در سه‌بر کروی هر پهلو کوچکترست از مجموع و بزرگترست از تفاضل دو پهلوی دیگر .

۲۸۲ – قضیه – مجموع پهلوهای سه‌بر کروی کوچکترست از چهار قائمه

۲۸۳ – قضیه – دو سه‌بر کروی قرینه معادلند .

۲۸۴ – قضیه – اگر یك سه‌بر کروی قطبی سه‌بر دیگر باشد دومی نیز قطبی اولی است .

۲۸۵ – قضیه – هر گوشه یك سه‌بر کروی متمم پهلوی مقابل برابر نظیرش در سه‌بر قطبی آنست .

۲۸۶ – قضیه – مجموع گوشه‌های سه‌بر کروی واقعست بین ۲ و ۶ قائمه .

۲۸۷ – قضیه – نسبت مساحت سه‌بر بسطح کره مساوی نسبت فضل کروی آنست به ۸ قائمه .

نتیجه – ۱) مساحت سه‌بر کروی نصف حاصلضرب فضل کروی آنست در مساحت دایرهٔ بزرك :

$$S = \frac{1}{2}\pi R^{2}(\text{ز}A + \text{ز}B + \text{ز}C - 180)$$

۲) اگر سه‌بر سه‌قائمه‌را که $\frac{1}{8}$ کره است واحد سطح و زاویه قائمه را واحد زاویه بنامیم سطح سه‌بر مساویست با فضل کروی آن .

XXIV قوت نقطه نسبت بکره

۲۸۸ـ هر گاه از نقطه M ، بفاصلهٔ d از مرکز کره Σ (ش ۱۹) ، قاطعه غیر مشخصی مرور دهیم تا کره را در I و K قطع کند مقدار بست MI ・ MK ثابت و مساوی $p = d^2 - R^2$.

مقدار p را قوت نقطه M نسبت به کره Σ گویند ، برای تکمیل رجوع شود بشمارهٔ ۱۱۹

۲۸۹ . **قضیه** — مکان نقاطی که نسبت بدو کره یك قوه داشته باشند صفحه ایست ، بنام صفحه **اصلی** ، عمود بر خط المرکزین که خط المرکزین را در H قطع کند و

$$OH = \frac{OO'}{2} + \frac{r^2 - r'^2}{2OO'}$$

باشد (در دو کره متقاطع ، مماس یا متحد المرکز صفحه اصلی بترتیب صفحه تقاطع آنها ، صفحهٔ مماس مشترك آنها یا صفحه‌ای واقع در بی نهایت است) .

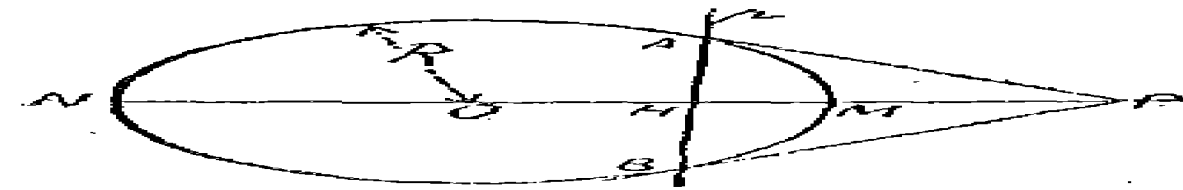
نتیجه — ۱) سه صفحه اصلی سه کره یکدیگر را بر یك خط ، بنام **محور اصلی** سه کره ، تلاقی میکنند . ۲) شش صفحهٔ اصلی چهار کره که مراکزشان در یك صفحه نباشند بر یك نقطه ، موسوم به **مرکز اصلی** چهار کره ، میگذرند .

XXV قطب و قطبی

۱ــ در صفحه (قطب و قطبی نسبت بدایره)

۲۹۰ــ تعریف ــ مکان هندسی مزدوجهای توافقی یك نقطهٔ P را نسبت بدوانتهای قاطع متحرکی که بر P بگذرد و دایرهٔ (C) را در M و N قطع کند ، قطبی P نسبت به (C) گویند .

۲۹۱ــ قضیه ــ قطبی نقطه P نسبت بدایرهٔ (C) خطی است مانند p عمود بر PO که OP را در H تلاقی کند و $OP \cdot OH = R^2$ باشد .

برحسب آنکه P خارج یا داخل دایره یا روی دایره باشد قطبی آن دایره را قطع میکند ، در خارج آن ، یادر P مماس بر آن است . P را قطب خط p گویند .

۲۹۲ ــ قضیه ــ قطب هرخط که بر نقطه‌ای بگذرد بر قطبی این نقطه قراردارد و بعکس قطبی هرنقطه که برخطی واقع باشد برقطب این خط میگذرد .

۲۹۳ــ اشکال قطبی معکوس ــ اگرچند بر ABCDE ودایره (C) درصفحه‌ای مفروض باشند وچندبر A'B'C'D'E' را بدست آوریم بطوریکه هرضلع این قطبی یك رأس آن باشد ، هرضلع آن نیز قطبی یك راس این خواهد بود . چنین دوشکل را قطبی معکوس یکدیگر گویند .

اگر در شکلی چند نقطه بریك خط باشند در قطبی

معکوس آن چند خط بر یك نقطه میگذرند . از این خاصیت برای اثبات قضایای مربوط بخطوط متقارب با نقاط واقع بر یك خط ممکن است استفاده شود .

۳ — در فضا قطب و قطبی نسبت بکره

۳۹۴ — تعریف — مثل شمارهٔ ۲۹۰ .

۳۹۵ — قضیه — قطبی یك نقطه P نسبت بکره صفحه ایست مانند (π) عمود بر خط OP که آنرا در H قطع کند و $OP \cdot OH = R^2$ باشد .

(بقیه مانند شمارهٔ ۲۹۱)

۳۹۶ — قضیه — قطب هر صفحه که بر نقطه‌ای بگذرد بر صفحه قطبی این نقطه واقع است و صفحه قطبی هر نقطه که بر صفحه‌ای واقع باشد بر قطب این صفحه میگذرد .

نتیجه — قطب‌های جمیع صفحاتی که بر خط D میگذرند بر یك خط مانند D' واقعند این خاصیت متقابل است . بااینجهت D و D' را دو خط مزدوج نسبت بکره (S) گویند . هر یك از دو خط مزدوج در صفحه ایست که از مرکز کره بر دیگری عمود شود . عمود مشترك آنها بر مرکز کره میگذرد و آنها را در k و k' قطع میکنند و $Ok \cdot Ok' = R^2$ است .

XXVI انعکاس

۱ — در صفحه

۳۹۷ — تعریف — اگر نقطه O و شکل F مفروض باشند و از O به A و B و C . . . نقاط مختلف F وصل کرده در

روی خطوط واصل نقاط A' و B' و C' و ... را بدست آوریم بقسمی که :

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \dots = p$$

باشد از مجموع نقاط A' و B' و ... شکل F' منعکس شکل F نسبت بمرکز انعکاس O باقوت انعکاس p بدست میاید . اگر هردو نقطهٔ متناظر در یکطرف O باشند p مثبت وگرنه منفی است . هردو نقطه متناظر را منعکس یکدیگر میگویند .

هرگاه $p>0$ باشد و بمرکز O و شعاع $\sqrt{p}$ دایره‌ای رسم کنیم ، این دایره را ، که مکان نقاطیست که بر منعکس خود منطبقند ، دایره انعکاس مینامید .

۳۹۸ — نتیجه — ۱) دو نقطه منعکس نسبت بدایره انعکاس مزدوج یکدیگرند ۲) بین AB و A'B' خطوط واصل بین دو نقطه A و B و دو منعکس آنها این رابطه برقرار است :

$$A'B' = AB \times \frac{p}{OA.OB}$$

۳) دو نقطه A وB با منعکسهایشان A' و B' بر روی یك دایره قرار دارند .

۳۹۹ — قضیه — مماسهای بر دو منحنی منعکس در دو نقطه منعکس A و A' با خط AA' زوایای مساوی میسازند

نتیجه — منعکس هرزاویه با آن مساویست .

۴۰۰ — قضیه — اگر F' و F'' منعکسهای F با قوتهای

P' و P'' نسبت به نقطه O باشند، F' و F'' نسبت بمرکز O با نسبت P' متجانس یکدیگرند و برحسب آنکه P' و P'' متحدالعلامه یا $\frac{P'}{P''}$ مختلف العلامه باشند تجانس آنها مستقیم یا معکوس میباشد .

۳۰۱ — قضیه - ۱) منعکس دایره ای که برمرکز انعکاس بگذرد خط بسمت عمود بر قطری که بر مرکز انعکاس میگذرد . ۲) منعکس هر خط دایره ایست که بر مرکز انعکاس مرور کند . (اگر خط برمرکز انعکاس بگذرد منعکس آن برخودش منطبق است)

۳۰۲ — قضیه - منعکس هر دایره (که بر O نگذرد) دایره است .

نتیجه - ۱) هر دو دایره، منعکس ومتجانس یکدیگرند نسبت بنقاط تلاقی مماسهای مشترک خود .

۲) مماسهای بر دو نقطه منعکس از دو دایره یکدیگر را روی محور اصلی قطع میکنند

۳ — در فضا

۳۰۳ - قضیه مانند شماره ۲۹۷ خواص شماره ۲۹۸ در فضا نیز صحیح است .

۳۰۴ - قضیه - ۱) منعکس هر کره که برمرکز انعکاس بگذرد صفحه است عمود بر قطری که برمرکز انعکاس مرور نماید . ۲) منعکس هر کره کره دیگر است . ۳) منعکس هر صفحه کره ایست که برمرکز انعکاس میگذرد .

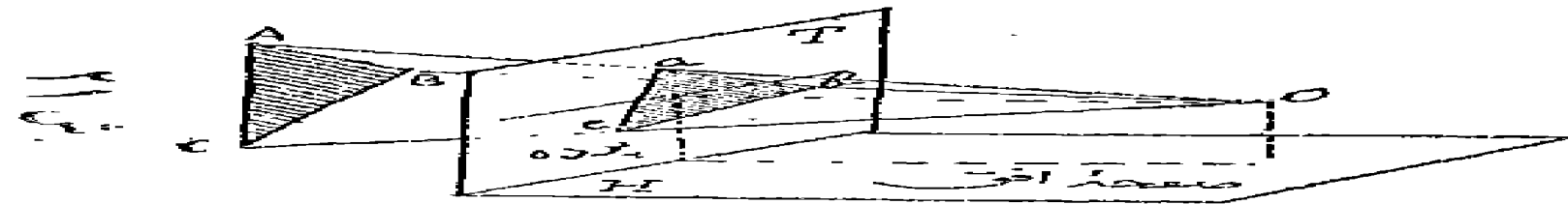
۳۰۵ - قضیه - منعکس هر دایره نسبت بیک نقطه که

در صفحه دایره نباشد دایره‌ها ست.

دایره اخیر را تصویر مرکزی proj. stéréographique دایره اولی نسبت بمرکز تصویر O میگویند

نتیجه - ۱) اگر قاعده مخروط مستدیری بر روی کره‌ای باشد این کره مخروط را در دایره دیگری هم قطع میکند ۲) بر هر دو دایره واقع بر یک دایره عموماً میتوان دو مخروط گذارند.

XXVII مناظر و مرایا (پرسپکتیو)

۳۰۶ - تعریف - در شکل F و F′ را گویند نسبت بیکدیگر در وضع مناظری هستند، یا یکی تصویر مرکزی یا تصویر مخروطی یا پرسپکتیو دیگریست هر گاه هر نقطه و نقطه مناظر آن با نقطه ثابتی مانند O بر یک امتداد باشند. نقطه O را مرکز تصویر یا نقطه دید میگویند. پرده صفحه‌ایست که بخواهیم پرسپکتیو جسمی را بر روی آن رسم کنیم (ش ۲۱).

P موقع عمودی را که از نقطه دید بر پرده فرود آید نقطه اصلی و فاصله OP را فاصله اصلی و خط HH′ که از نقطه اصلی موازی سطح افق رسم شود خط افق و دو نقطه I و I′ را که بر روی HH′ بفاصله‌ای مساوی فاصله اصلی از P اختیار شوند نقاط مسافت میگویند.

پرسپکتیو هر نقطه مانند A نقطهٔ A′ محل تلاقی شعاع دید OA با پرده.

پرسپکتیو هر خط مانند AB خط A′B′ فصل مشترک صفحه OAB است با پرده.

نقطهٔ گریز — هرگاه از O خطی موازی AB رسم کنیم تا پرده را در f قطع کند f، که پرسپکتیو نقطهٔ بی نهایت دور خط AB است، نقطهٔ گریز AB نامیده میشود.

خط گریز — هرگاه از O صفحه ای موازی صفحه ABC رسم کنیم تا پرده را بر خط F قطع کند F، که پرسپکتیو خط بی نهایت دور صفحه ABC است، خط گریز آن صفحه نامیده میشود. صفحه ای را که موازی پرده رسم شود جبهی مینامند.

۳۰۷ — **قضیه** — پرسپکتیوهای خطوط موازی بر یک نقطه میگذرند (نقطهٔ گریز مشترک آنها).

نتیجه — اگر خطوط موازی با پرده هم موازی باشند پرسپکتیو های آنها متوازیند.

۳۰۸ — **قضیه** — خطوطی که یکدیگر را در روی صفحه جبهی مار بر نقطهٔ دید تلاقی کنند پرسپکتیوهایشان متوازیند.

۳۰۹ — **قضیه** — نقاط گریز خطوط افقی در روی خط افق HH′ قرار دارند.

حالات خاص — نقاط گریز خطوط افقی که با پرده زاویهٔ ۴۵° تشکیل میدهند نقاط مسافت D و D′ هستند.

٣١٠ قضیه – ۱) پرسپکتیو دایره یک قطع مخروطی (بعضی هذلولی یا شلجمی) است ۲) پرسپکتیو یک قطع مخروطی ممکنست دایره باشد.

XXVIII مارپیچ Hélice

٣١١ — تعریف اگر زاویهٔ مانند α حول استوانه مستدیر قائمی چنان بپیچید که یک ضلع آن بر قاعده منطبق شود ضلع دیگر بر تنهٔ استوانه خمی ترسیم میکند که مارپیچ یا حلزونی نام دارد. (ش ۲۲)

چون استوانه و اضلاع زاویه نامحدودند مارپیچ هم بی پایان میباشد. محور و شعاع استوانه را جان âme و شعاع مارپیچ و ظل زاویه α راشیب آن گویند. نقطه A مبداء مارپیچ است. فاصله دو نقطه مارپیچ واقع بر یک مولد مانند A و D را گام مارپیچ مینامند قسمت MP از مولد محدود بین یک نقطه M از مارپیچ و قاعدهٔ استوانه را عرض نقطه M و قوس AP واقع بین مبداء و نقطه P ، تصویر M، را طول منحنی نقطه M میگویند. قسمتی از مارپیچ که فاصله دو سر آن یک گام باشد یعنی از یک دور کامل تشکیل شده باشد یک پیچ نام دارد.

ش ۲۲

پیچ ممکنست براست dextrorsum (ش ۲۳) یا بچپ sinistrorsum (ش ۲٤) باشد یعنی درقسمت مرئی استوانه بطرف راست یا بطرف چپ بالا برود .

(ش ۲۳) (ش ۲٤)

۳۱۲ — **قضیه** — عرض هر نقطه ماربیچ متناسب است با طول منحنی آن نقطه . این نسبت مساوی شیب ماربیچ است

تعریف — ازقضیه فوق این تعریف برای ماربیچ نتیجه میشود : ماربیچ منحنی ایست که براستوانه قائم مستدیری پیچیده شده باشد وعرض هر نقطهٔ آن متناسب با طول منحنی آن نقطه باشد .

۳۱۳ — ماربیچهای واقع بریك استوانه یا استوانه‌های متساوی را که در یك جهت بوده وشیبشان با هم برابر باشد **متساوی** گویند .

۳۱٤ — **مماس بر ماربیچ** — **قضیه** — برهر نقطه‌از ماربیچ مماسی میتوان رسم کرد . تصویر آن بر صفحهٔ قاعده استوانه مساوی طول منحنی نقطه تماس است .

۳۱۵ — **نتیجه** — میل مماسهای بر ماربیچ با صفحه قاعده مقدار یست ثابت .

۳۱۶ — معادله مارپیچ

$y = kx = \frac{h}{2\pi r} x$ (گام $= h$)

۳۱۷ — قضیه — کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه از سطح استوانه (مستدیر قائم) قوسی از مارپیچ است .

مخروطات

ا — بیضی

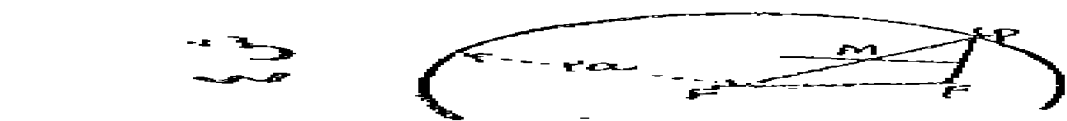
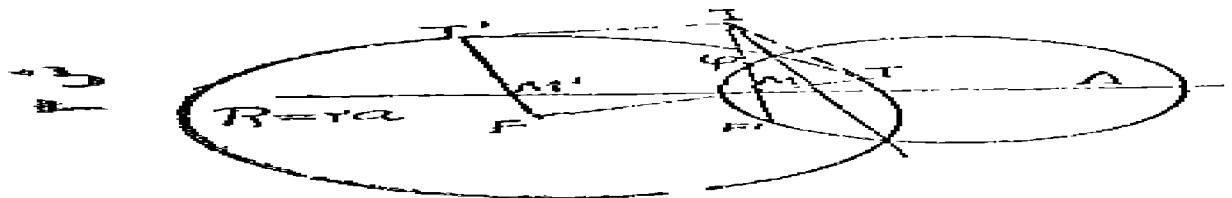
۱ — تعریف بیضی مکان نقاطیست که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت F و 'F مساوی مقدار ثابت $2a$ باشد — F و 'F را دو کانون و فاصله کانونی 'FF $= 2c$ را فاصله کانونی ، O وسط 'FF را مرکز ، خط 'AA را که بر F و 'F میگذرد و دو انتهای آن A و 'A از O بفاصله a هستند محور اطول ، خط 'BB را که از O بر 'AA عمود شود و دو انتهای آن B و 'B از نقطه O بفاصله $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ باشند محور اقصر ، A و 'A و B و 'B را چهار رأس ، نسبت $\frac{c}{a} = e$ را خروج از مرکز ، دایره‌ای را که بمرکز O و شعاع $a = OA$ رسم شود دایره اصلی ، دو دایره را که بمراکز F و 'F و شعاع $2a$ رسم شوند دوایر هادی و هر خطی را که از یک کانون بیک نقطه M از بیضی وصل شود شعاع حامل مینامند .

خارج شده باشد در P قطع کند ، بعد کاغذ را بر PO منطبق نموده نقاط M و P و ´P را نشان میکنیم ´MP نصف محور مجهول است .

۳ — **قضیه** ـ مجموع فواصل نقاط درون بیضی از دو کانون کوچکتر و مجموع فواصل نقاط بیرون آن از دو کانون بزرگتر است از ۲a .

٤ — **قضیه** . بیضی مکان مراکز دوایر است که بیکی از دو کانون آن بگذرند و بر دایرهٔ هادی کانون دیگر مماس باشند .

۵ — **رسم بیضی باستفاده از دایره هادی** — از F (ش ۳) به φ نقطهٔ غیر مشخصی از دایره هادی وصل میکنیم عمود منصف Fφ شعاع ´Fφ را در M قطع میکند . M روی بیضی است .

۶ — **فصل مشترک خط و بیضی** - اگر بخواهیم فصل مشترک خط △ (ش ٤) را با بیضی (F ، ´F ، 2a) پیدا کنیم φ قرینه F را نسبت به △ بدست می‑آوریم ، M مرکز دایره ای که بر F و φ بگذرد و بر دایره هادی ´F مماس باشد محل تلاقی خط و بیضی است . برای بدست آوردن M باین طریق عمل میکنیم : بر F و φ دایره اختیاری میگذرانیم تا دایره هادی ´F را در C و D قطع کند . CD و Fφ یکدیگر را در I تلاقی میکنند از I مماسهای IT و ´IT را بر دایرهٔ هادی ´F رسم می‑کنیم T، ´F و ´T و ´F خط △ را در

M و 'M قطع میکنند . M و 'M جوابهای مسئله‌اند (اگر I روی دایره هادی 'F واقع شود خط با بیضی مماس است و اگر I در درون دایره هادی افتد خط بیضی را قطع نمیکند) .

مماس بر بیضی

۷ــ قضیه ــ مماس بر هر نقطه از بیضی گوشه بین یك شعاع حامل و امتداد شعاع دیگر را نصف میکند .

نتیجه ــ ۱) قرینه هر کانون نسبت به مماس بر روی دایرهٔ هادی کانون دیگر ست ۲) مماس بر هر رأس عمود ست بر محور .

۸ــ قضیه ــ قائم بر هر نقطه‌از بیضی گوشه بین دو شعاع حامل را نصف میکند .

نتیجه ــ مماس و قائم بر هر نقطه از بیضی 'FF را به نسبت توافقی تقسیم میکنند .

۹ ــ قضیه ــ La Hire ــ تصویر هر کانون بر روی مماس واقع ست بر روی دائرهٔ اصلی .

۱۰ ــ رسم مماس بر بیضی ــ ۱) از نقطه واقع بر بیضی : دو شعاع حامل را میکشیم ، منصف گوشه خارجی آنها مماس مطلوب ست .

۲) از نقطه P خارج بیضی : بمرکز P و شعاع PF دایره‌ای میز نیم تا دایرهٔ هادی 'F را در φ و 'φ قطع کند ، عمودهائی که از P بر Fφ و 'Fφ فرود آیند دو مماس مطلوب‌ند (شرط

امکان متقاطع بودن دایره مرسوم با دایره هادی F' است، یعنی باید P بیرون بیضی باشد).

۳) مماس موازی Δ : از F' عمودی بر Δ فرود می‌آوریم تا دایره هادی F' را در φ و φ' قطع کند، عمود منصف های $F\varphi$ و $F\varphi'$ را رسم مینمائیم. مسئله همیشه دو جواب دارد.

۱۱ — **نتیجه** – وتر واصل بین نقاط تماس دو مماس موازی برمرکز بیضی میگذرد.

۱۲ — **قضیه** Poncelet – ۱) اگر از P دو مماس بر بیضی رسم شود این دو مماس با PF و PF' گوشه‌های مساوی میسازند. ۲) خطی که از P بیکی از دو کانون وصل شود منصف گوشهٔ اشعهٔ حاملی است که ازاین کانون بدو نقطه تماس منتهی گردند.

۱۳ — **قضیه** — مماس متحرکی که بین دو مماس ثابت بر بیضی محدود باشد از هر کانون بزاویهٔ ثابتی دیده میشود.

۱٤ — **قضیه** — مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر بیضی دایره ایست بمرکز O و شعاع $\sqrt{a^2 + b^2}$

۱۵ — **قضیه** — ۱) حاصلضرب فواصل دو کانون از هر مماس مساویست با b^2 ؛ ۲) اگر از یك کانون خطی موازی مماس رسم کنیم تفاضل مربعات فواصل مرکز از مماس و از خط مرسوم مساویست با b^2

۱۶ — قضیه Chasles — مکان نقاط برخورد دو مماس متعامد بر دو بیضی متحدالکانونین بمحورهای a و b و a' و b' دایره ایست بمرکز O و شعاع:

$$\sqrt{a^{2}+b'^{2}} \quad \text{یا} \quad \sqrt{a'^{2}+b^{2}}$$

شعاعهای حامل — معادله بیضی

۱۷ — قضیه — شعاعهای حامل هر نقطه M از بیضی که فاصله تصویر آن بر محور اطول از مرکز بیضی x فرض شود بترتیب عبارتند از

$$a-\frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad a+\frac{cx}{a}$$

۱۸ — قضیه — اگر محورهای بیضی محور های مختصات فرض شوند (محور اطول محور طولها) معادلهٔ بیضی عبارتست از

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$$

بیضی تصویر دایره است

۱۹ — قضیه — تصویر قائم دایره بر صفحه بیضی ایست که طول محور اطول آن a و طول محور اقصرش $a\cos\alpha$ (α زاویه بین صفحه دایره و صفحه تصویر) میباشد.

۲۰ — قضیه — مساحت بیضی مساویست با πab

نتیجه — برای بدست آوردن مساحت هر جزء از بیضی باید مساحت جزء نظیر آن را در دایره اصلی بدست آورد و در $\frac{b}{a}$ ضرب کرد.

۲۱ — قضیه – نسبت عرض نقاط مختلف بیضی بعرض نقاط نظیر آنها از دایره اصلی مساوی مقدار ثابت $\frac{b}{a}$ است . (نقطه نظیر آن نیست که با نقطه مفروض در روی عمودی بر ′۱.۱. واقع باشند)

۲۲ — رسم مماس بر ۱) از یك نقطه M واقع بر بیضی – نظیر نقطه مفروض را بر روی دایره اصلی یافته از آن مماسی بر دایره اصلی رسم میکنیم واز محل تقاطع این مماس با محور اطول بیضی به M وصل مینمائیم . ۲) از نقطه M خارج بیضی – نقطه ′M را که عرض آن $\frac{a}{b}$ عرض M باشد یافته از آن مماس ′M′T را بر دایره اصلی رسم میکنیم تا محور اطول را در I قطع کند IM مماس بر بیضی است و نقطه تماس واقع است در روی عمودی که از ′T بر محور اطول فرود آید. ۳) مماس موازی امتداد Δ – I فصل مشترك Δ را با محور اطول بدست آورده نقطه ′M را هم که عرض آن $\frac{a}{b}$ یك نقطه M از Δ باشد تعیین میکنیم بر دایره اصلی مماسهائی موازی ′IM میکشیم و در روی عمود هائیکه از نقاط تماس بر محور اطول فرود آیند نقاطی که عرضشان بعرض نقاط مماس بر نسبت $\frac{b}{a}$ باشد تعیین نموده از این نقاط خطوطی متوازی Δ رسم میکنیم .

II هذلولی

۲۳ — تعریف – هذلولی مکان نقاطیست که تفاضل

فواصلشان از دو نقطه ثابت F و F' مساوی مقدار ثابت ۲a باشد .
سایر تعاریف مانند شمارهٔ ۱ (فقط باید توجه کرد که
محور اقصر هذلولی در حقیقت وجود ندارد و برای شباهتی که
بین خواص بیضی و هذلولی هست خطی را که از وسط دو
کانون بطول $2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$ را بر محور شکل عمود شود محور اقصر
مینامند) در هذلولی بجای محور اطول اغلب گفته میشود محور قاطع .
اگر $a = b = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ باشد هذلولی را متساوی الاضلاع
میگویند .

۴۳ — رسم هذلولی — ۱) با حرکت متصل : خط کشی
بطول l را حول سنجاقی که در یک کانون فرو رفته باشد دوران
میدهیم ، نخی بطول ۲a — l اختیار میکنیم ، یک سر آنرا
بانتهای خط کش و بیده سر دیگرش را در کانون دیگر ثابت
نگاهمیداریم . نوک مدادی که همواره نخ را بر خط کش
متکی نگاهدارد قسمتی از هذلولی رسم میکنند . ۲) با نقاط
یابی : مانند بیضی با رسم قوسهائی بشعاعهائی l و l — ۲a .

۴۵ — قضیه — تفاضل فواصل هر نقطه درون هذلولی از
دو کانون بزرگتر و از آن نقاط بیرون هذلولی کوچکتر است
از ۲a . و بعکس .

۴۶ — قضیه — هذلولی مکان هندسی نقاطیست که از یک
کانون و دایرهٔ هادی کانون دیگر بیک فاصله باشند (مکان

مراکز دوایر بیست که بریک کانون بگذرند و بردایره کانون هادی دیگر مماس باشند).

۳۷ـــ فصل مشترک خط و هذلولی ــ مانند فصل مشترک خط و بیضی

مماس بر هذلولی

۳۸ـــ قضیه ــ مماس بر هذلولی زاویه بین دو شعاع حامل را نصف میکند.

نتیجه ۱ـــ رجوع شود بشمارهٔ ۷ (نتیجه ۱ و ۲)

نتیجه ۲ـــ قائم بر هر نقطه از هذلولی زاویه بین یک شعاع حامل و امتداد شعاع دیگر را نصف میکند

نتیجه ۳ـــ رجوع شود به شمارهٔ ۸ (نتیجه)

۳۹ـــ قضیه ــ تصویر هر کانون برروی مماس واقعست بردایرهٔ اصلی.

۴۰ـــ رسم مماس ــ مانند شمارهٔ ۱۰ . فقط باید توجه کرد که رسم مماس موازی امتداد معین فقط وقتی جواب دارد که عمودیکه از یک کانون بر آن امتداد فرود میآید دایرهٔ هادی کانون دیگر را قطع کند (یعنی عمود بر امتداد مفروض درداخل زاویهٔ بین دو مماسی باشد که از یک کانون بردایره هادی کانون دیگر رسم میشوند).

۴۱ـــ قضیه دو نسله ـــ مانند بیضی (شمارهٔ ۱۲)

۴۲ـــ قضیه ـــ عین خواص مندرج در شمارهٔ ۱۵

مجانبهای هذلولی

۳۳ - تعریف — (رجوع شود بشماره ۱۸۸ قسمت جبر)
— و نیز میتوان گفت مجانب هذلولی مماسی است که نقطه تماس آن بینهایت دور باشد.

۳۴ — قضیه — هذلولی دو مجانب دارد که بر مرکز آن میگذرند.

نتیجه ۱ - مجانبها نسبت بدو محور قرینه یکدیگرند

نتیجه ۲ — دو مجانب هذلولی عمودهائی هستند که از O بر مماسهائی که از F و F' بر دایره اصلی رسم میشوند فرود آیند.

۳۵ — قضیه — مجانبها دو قطر مستطیلی هستند که مرکزش O و اضلاعش با دو محور موازی و بترتیب مساوی $2a$ و $2b$ باشند.

نتیجه ۱ — دو مجانب هذلولی متساوی المحورین برهم عمودند.

نتیجه ۲ — فاصله هر کانون از هر مجانب مساوی b است.

شعاعهای حامل - معادله هذلولی

۳۶ — قضیه — شعاعهای حامل هر نقطه هذلولی مساوی هستند با:

$$\frac{cx}{a} - a \quad و \quad \frac{cx}{a} + a$$

(x فاصله O از عمودیست که از نقطه مفروض بر محور قاطع فرود آید)

۳۷ — **قضیه** — اگر نقطهٔ (o) مرکز و محورهای هذلولی محور های مختصات باشند معادله هذلولی :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ میباشد

نتیجه — معادله هذلولی متساوی‌المحورین :

$$x^2 - y^2 = a^2$$ است

نتیجه ۲ — اگر مجانبهای هذلولی متساوی‌المحورین محورهای مختصات فرض شوند معادله آن :

$$xy = \frac{a^2}{2}$$ یا $$xy = \frac{c^2}{4}$$ میباشد.

III سهمی (شلجمی)

۳۸ — **تعریف** — سهمی مکان هندسی نقاطیست که از یك نقطه، بنام **کانون** و یك خط، بنام **هادی**، بیك فاصله باشند. خطی که از کانون بگذرد و بر هادی عمود باشد محور، فاصله کانون از هادی پارامتر وخطوطی که یکی یك نقطه M را بکانون F وصل کنند و دیگری از M بر هادی عمود باشد **شعاعهای حامل** نامدارند. محل تلاقی محور با سهمی رأس آنست. تصویر قسمتی از مماس واقع بین نقطه تماس و امتداد محور بر محور را **تحت ظل** وتصویر قسمت مشابه از قائم را **تحت قائم** گویند.

۳۹ — رسم سهمی — ۱) باحرکت دائم – خط کشی در مقابل هادی میگذاریم. یك سر نخی بطول یك ضلع گونیا را

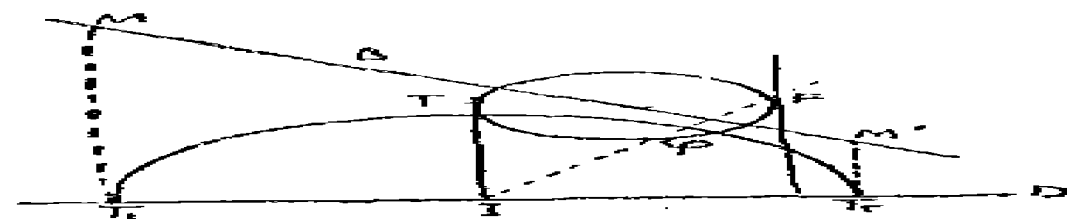
بکانون و سر دیگر آنرا بنقطه تلاقی آن ضلع با وتر گونیا ثابت نموده ضلع دیگر گونیا را متکی بخط کش میلغزانیم، نوک مدادی که نخ را همیشه بضلع گونیا متکی نگاهدارد قسمتی از سهمی را رسم میکند. ۲) ترسیم با نقطه یابی — از کانون بنقطه غیر مشخص N از هادی وصل میکنیم، عمود منصف FN عمودیرا که از N بر هادی اخراج شود در M قطع میکند، M واقع است بر روی سهمی. راه دیگر: F کانون و D محل تلاقی محور و هادی فرض میشوند، خط △ را موازی هادی رسم میکنیم تا محور را در D' تلاقی کند. بمرکز F و شعاعی مساوی D'D قوسی میزنیم تا △ را در M و M' قطع کند، این دو نقطه بر روی سهمی هستند.

۴ — **قضیه** — هر نقطه درون سهمی بکانون نزدیکتر است تا بهادی و هر نقطه بیرون آن بهادی نزدیکتر است تا بکانون. و بعکس.

۱ ۴ — **قضیه** — خطی که از F بر هادی عمود شود محور تقارن سهمی است (بهمین جهت محور نامیده میشود).

۲ ۴ — **قضیه** — سهمی حد یک بیضی است که یک رأس و یک کانون آن ثابت بماند ولی کانون دیگر در روی محور بطول بی نهایت دور شود.

تبصره — از قضیه فوق میتوان استفاده کرد و بسیاری از خواص سهمی را با استفاده از خواص مشابه در بیضی ثابت نمود.

٤٣ — فصل مشترك خط و سهمی — برای بدست آوردن فصل مشترك خط △ با یك سهمی که کانون و هادی آن F و (D) هستند (ش ۵) φ قرینه F' را نسبت به △ یافته دایره‌ای رسم میکنیم که بر F' و φ بگذرد و بر (D) مماس شود، مرکز این دایره فصل مشترك سهمی با △ است. برحسب آنکه φ و F یك طرف (D) واقع شوند یا φ بر (D) قرار گیرد خط سهمی را دوجا قطع میکند یا بر آن مماس است. اگر φ آن طرف (D) واقع شود خط منحنی را قطع نمی نماید.

(ش ۵)

مماس بر سهمی

٤٤ـ قضیه — مماس بر سهمی منصف زاویه بین دو شعاع حامل است.

نتیجه ۱ — قرینه کانون نسبت بهر مماس بر خط هادی واقع است.

نتیجه ۲ — اگر از F' خطی بر شعاع حامل نقطهٔ تماس عمود کنیم، این خط برمحل تلاقی مماس با هادی میگذرد.

نتیجه ۳ — قائم بر سهمی منصف زاویه بین یك شعاع حامل و امتداد دیگری است.

٤٥ ـ قضیه — مماس بر راس مکان تصاویر کانون بر مماسهای بر سهمی است.

٤٦ قضیه ـ ۱) راس سهمی تحت قائم را بدو جزء مساوی تقسیم میکند ۲۰) تحت قائم مساوی پارامتر (ممیز) سهمی است.
نتیجه ـ کانون سهمی از نقاط برخورد مماس و قائم هر نقطه با محور بیك فاصله است .

٤٧ ـ رسم مماس بر سهمی ۱) از نقطه M واقع بر منحنی : از M منصف زاویه بین MP و عمودیرا که از M بر هادی فرود آید رسم میکنیم (ش ٦) راه دیگر :

(ش ٦)

FT را مساوی FM بر محور نقل میکنیم ، MT مماس مطلوبست . راه سوم : ST را مساوی SP جدا میکنیم MF مماس است. راه چهارم : عمود بر MF هادی را در I قطع میکند MI جواب مسئله است . راه پنجم : از خاصیت تحت قائم استفاده میشود ، یعنی PN را مساوی پارامتر جدا میکنیم و MT را بر MN عمود مینمائیم . ۲) از نقطه M خارج سهمی : بمرکز M و شعاع MF قوسی میزنیم تا هادی را در φ قطع کند عمودی که از M بر Fφ رسم شود جواب مسئله است . ۳) مماس بموازات امتداد △ : از F عمودی بر این امتداد فرود میآوریم تا هادی را در φ قطع کند ، عمود منصف Fφ مماس مطلوبست .

٤٨ ـ قضیه مکان نقاطی که از آنها بتوان دو مماس عمود برهم بر سهمی رسم کرد خط هادیست .
نتیجه ۱) خطی که بر نقاط تماس دو مماس متعامد بگذرد

بر کانون میگذرد ۲) قطعه‌ای از یك مماس متحرك محصور بین نقطه تماس وخط هادی از کانون بزاویه قائمه دیده میشود.

۴۹ - قضیه - خطی که از محل تقاطع دو مماس موازی محور رسم شود بروسط خط واصل بین نقاط تماس میگذرد.

۵۰ - قضیه - پو قسمله ۱) مماسهائیکه از یك نقطه M بر سهمی رسم شوند باخطی که این نقطه‌را بکانون ربط میدهد وبا عمودیکه از M برهادی فرود میآید گوشه‌های مساوی میسازند ۲) FM منصف گوشه بین شعاعهای حامل دو نقطه تماس است.

۵۱ - قضیه - قسمتی ازمماس متحرك که بین دومماس ثابت محصور باشد از کانون بگوشه ثابتی دیده میشود.

نتیجه - اگر سه مماس بر سهمی یکدیگر را در M و N و P قطع کنند دایره MNP بر کانون سهمی میگذرد.

شعاع حامل ، معادله ، مساحت سهمی.

۵۲ - قضیه - هرگاه راس سهمی را مرکز مختصات ، محور آنرا محور طولها و مماس بر راس را محور عرض ها فرض کنیم :

۱) شعاع حامل هر نقطهٔ بطول x مساویست با $x + \frac{p}{2}$

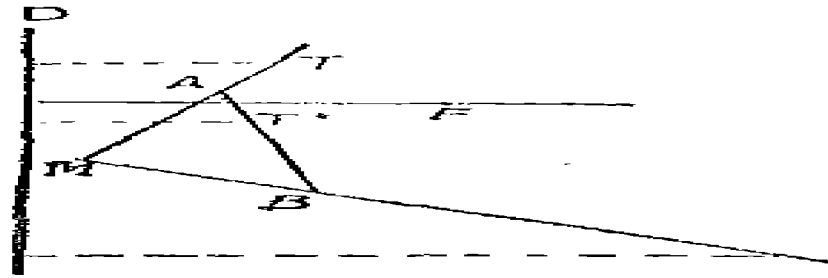
۲) معادله سهمی عبارتست از $y^2 = 2px$

۵۳ - قضیه - سطح قسمتی از سهمی محصور بین منحنی وعمودی که بر محور رسم شود $\frac{2}{3}$ سطح مستطیلی ست که

یك ضلع آن قسمتی از عمود مرسوم بین دو شاخه منحنی و ضلع دیگرش فاصله این عمود از رأس سهمی باشد .

۵٤ — قضیهٔ آپولونیوس — مماس متحرك محدود بین دو مماس ثابت مماسهای ثابت را بنسبت عکس یکدیگر تقسیم میکنند · یعنی (ش ۷)

$$\frac{AM}{AT} = \frac{BT'}{BM}$$

(ش ۷)

عکس قضیه هم صحیح است .

IV — خواص مشترك بیضی ، هذلولی و سهمی

۱ — کانون و هادی

۵۵ — تعریف — مکان هندسی نقاطی از صفحه را که نسبت فواصلشان از یك خط ثابت ، بنام هادی ، و یك نقطه ثابت ، بنام کانون ، مساوی مقدار ثابتی ، بنام خروج از مرکز باشد یك منحنی دارای هادی Courbe à directrice میگویند .

۵۶ — قضیه — ۱) بیضی مکان هندسی نقاطیست که نسبت e و a فواصلشان از کانون و هادی ثابتی ، ثابت و کوچکتر از ۱ میباشد .

۲) هذلولی مکان هندسی نقاطیست که نسبت e و ...

فواصلشان از کانون و هادی ثابتی ، ثابت و بزرگتر از
۱ میباشد .

۳) سهمی مکان هندسی نقاطیست که نسبت c و a ،
فواصلشان از کانون و هادی ثابتی مساوی ۱ میباشد .
($\frac{c}{a}$ خروج ازمرکز منحنی است . در بیضی و هذلولی
بازاء هر کانون یك هادی وجود دارد که وابسته بآن کانون است)
پس بیضی وهذلولی وسهمی مکان هندسی نقاطی هستند
که نسبت فواصلشان از نقطه ثابتی و خط ثابتی مقداری است
ثابت .

۵۷ — قضیه — منصف یکی اززاویه‌های حادث بین دو
خط که کانون F را بدو نقطه M و M' از یك بیضی ، هذلولی
یا سهمی وصل میکنند بر محل تلاقی $M'M$ با هادی △
میگذرد .

نتیجه ۱ — قطعه‌ای از مماس بر بیضی ،هذلولی یا سهمی
محصور بین هادی و نقطه تماس از کانون بزاویه قائمه دیده میشود .

نتیجه ۲ - اگر از یك نقطه P واقع بر هادی دو مماس
PT و PT' بر بیضی ،هذلولی یا سهمی رسم کنیم و تر TT'
بر کانون میگذرد و PF عمود است بر TT' .

۵۸ — رسم مماس — برای اینکه از نقطه T واقع بر
یکی از منحنیهای سه گانه مماسی بر آن رسم کنیم کافیست از T
به F وصل نمائیم و عمودی بر TF بکشیم تا هادی را در P

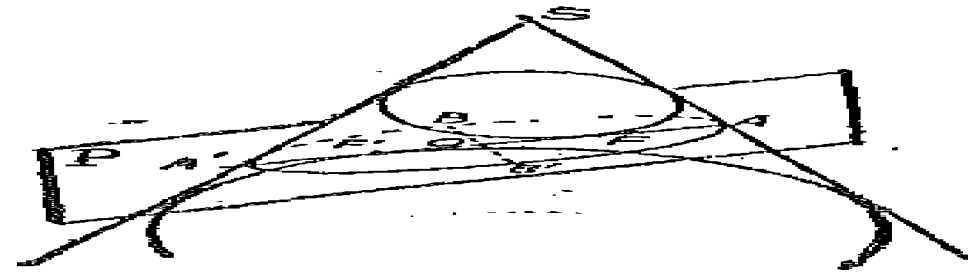
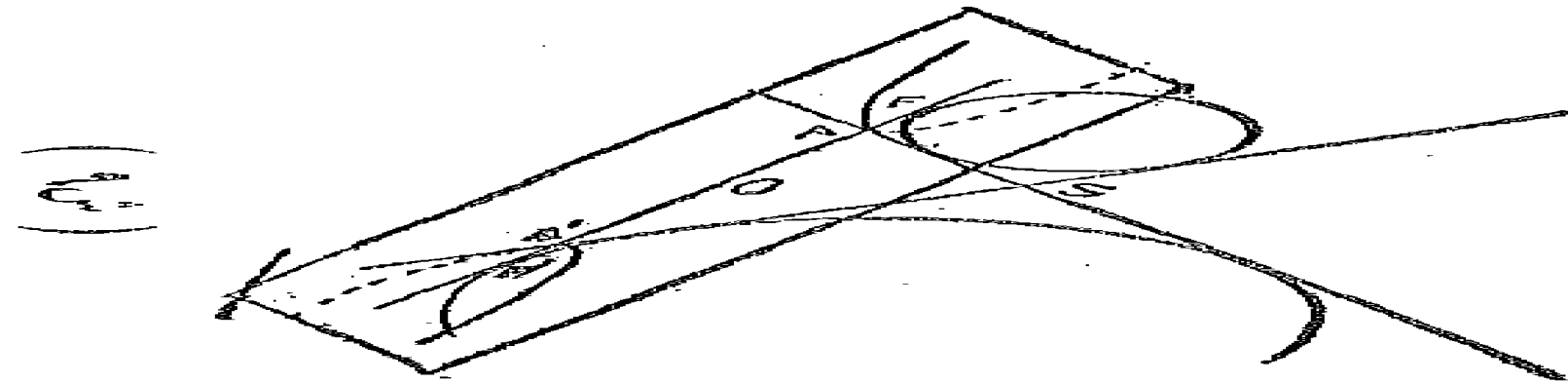
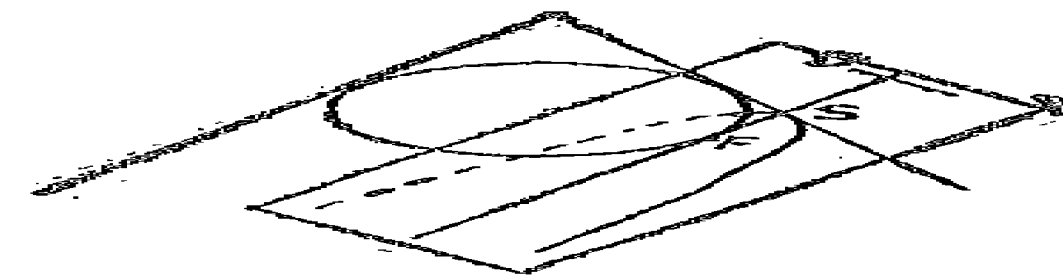
قطع کند. PT مماس مطلوبست.

۲- مقاطع مخروطی

۵۹- قضیه داندلن- هرگاه صفحه‌ای مخروط مستدیری را قطع کند: ۱) اگر همهٔ مولدهای آنرا در یك طرف راس تلاقی کند مقطع یك بیضی است (ش ۸) ۲) اگر امتداد بعضی از مولدها را قطع نماید (دو دامنهٔ مخروط را قطع کند) مقطع هذلولی است (ش ۹) ۳) اگر صفحه موازی یك مولد باشد مقطع سهمی است (ش ۱۰)

(ش ۸)

(ش ۹)

«ش ۱۰»

۶۰- تبصره ۱- اگر صفحه قاطع عمود بر محور مخروط مستدیر باشد مقطع دایره است.

۶۱- تبصره ۲- بمناسبت اینکه بیضی و هذلولی و سهمی

مقاطع صفحه در مخروط هستند آنها را مقاطع یا قطعات مخروطی یا بطور خلاصه مخروطات گویند بعضی را قطع ناقص ، هذلولی را قطع زائد و سهمی را قطع مکافی نیز مینامند .

٦٢ — تبصره ها — اگر رأس مخروط بینهایت دور شود جسم تبدیل باستوانه مستدیر میگردد . پس مقطع صفحه مستوی در استوانه مستدیر نیز بیضی است ، مگر وقتی که صفحه با مولد موازی باشد که در اینصورت مقطع دو خط مستقیم است (یعنی یک سهمی که پارامترش صفر و کانونش بی نهایت دور است) .

هندسه رقومی و هندسه ترسیمی

۱ — موضوع — موضوع هندسه‌های رقومی و ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله تصاویر قائم آنها .

M' تصویر نقطه M بر صفحه تصویر (P) موقع عمودیست که از M بر (P) فرود آید . همیشه میتوان از M به M' پی برد اما M' بتنهائی برای مشخص کردن M کافی نیست زیرا M' تصویر جمیع نقاطیست که بر روی عمودی که از M' موقع آنست واقع باشند .

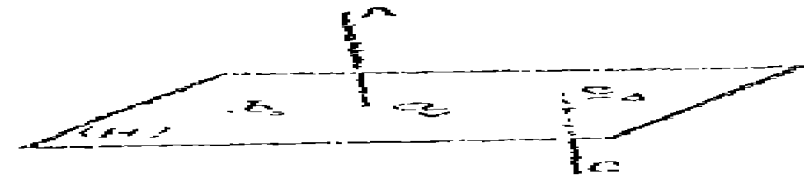
پس برای مشخص ساختن M باید علاوه بر M' عامل دیگری در دست باشد .

این عامل ممکنست رقوم M یعنی فاصله M از صفحه مقایسه باشد (موضوع هندسه رقومی) یا تصویر دیگری از

M بر صفحه دیگر (موضوع هندسه ترسیمی)
بنابراین موضوع هندسه رقومی نمایش اجسام است
بوسیله تصاویرشان بریك صفحه وفاصله نقاط مختلفشان از
این صفحه . موضوع هندسه ترسیمی نمایش اجسام است بوسیله
تصاویرشان بردو صفحه مشخص .

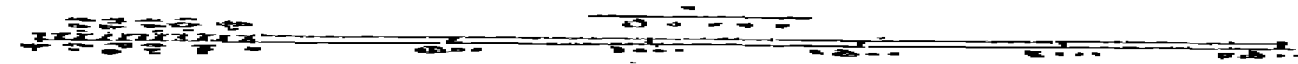
۱ ـ اصول هندسه رقومی

I ـ نقطه

۲ ـ نقطه بوسیله تصویر وفاصله اش از صفحه افق (صفحه
مقایسه) مشخص میشود . تصویر نقطه را با حروف لاتینی
کوچك ورقوم آنرا بشکل اندیس زیر آن نمایش میدهند مانند
نقطه a۷ (ش ۱) رقوم ها در صفحه مقایسه صفر ، زیر آن منفی و
بالای آن مثبت میباشند .

تصویر نقطه و رقوم آن را
ملخص نقطه میگویند . ملخص هر
شکل شکلی است که از ملخصهای
نقاط مختلف آن پدید آمده باشد .

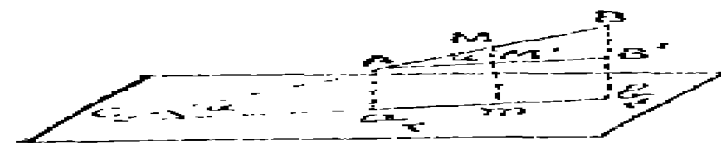
۳ ـ مقیاس ـــ چون اجسام را
بابعاد حقیقی نمیتوان نمایش داد ناچار
ابعاد آنها را ده ، صد ، هزار ، ...
مرتبه کوچك میکنند . مقیاس نسبت تصویر را بجسم نمایش
میدهد . مقیاس عددی ، با یك عدد بیان میکنند که ابعاد چند
مرتبه کوچك شده اند : مثال : $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ، $\frac{۱}{۸۰۰۰}$.

(ش ۱)

مقیاس خطی عبارت از خطی است که واحد طول را پس از کوچک کردن چند بار بر آن نقل کرده‌اند و جزء اول سمت چپ آنرا که **پاشنه مقیاس** میگویند باجزاء کوچکتر تقسیم نموده‌اند (ش ۲)

شکل ۲ مقیاس خطی $\frac{۱}{۵۰۰۰}$ را نمایش میدهد که در آن هر سانتیمتر معرف ۵۰ متر است. برای تعیین فاصله دو نقطه در روی نقشه با پرگار فاصله آنها را بر روی مقیاس نقل نموده میخوانند.

(ش ۲)

II ـ **خط مستقیم**

٤ ـ تصویر خط مستقیم خط مستقیم است و بوسیله دو نقطه مشخص میشود مانند خط $a_4 b_6$ (ش ۳) **اثر خط** فصل مشترک خط است با تصویر ش. **شیب خط** ظل میل خط و **اساس** یا **فراز خط** ظل تمام آن زاویه است:

(ش ۳)

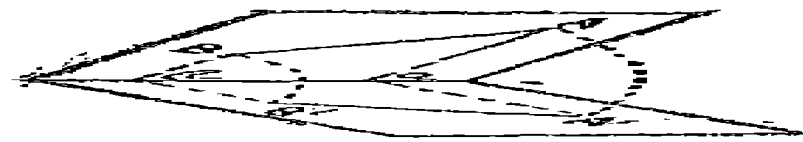
$$\text{شیب} = tg\,\alpha = \frac{BB'}{AB'} = \frac{MM'}{AM'} = \frac{۱}{am}$$

$$\text{اساس} = Cotg\,\alpha = \frac{B'A}{BB'} = \frac{AM'}{MM'} = am$$

پس **اساس خط** فاصله تصاویر دو نقطه از خط است که اختلاف رقومشان ۱ باشد و شیب عکس اساس میباشد.

خطی را که نقاط صحیح الرقوم بفاصله اساس برآن معین شده باشد مدرج گویند .

۵ — **خط افقی** همه جا دارای یك رقوم است . تصویر **خط قائم** یك نقطه است .

۶ — **تسطیح صفحه قائم بر افق** یعنی صفحه قائم را حول یك خط افقی بنام لولا باندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم تا موازی صفحهٔ افق شود. اگر رقوم لولا صفر باشد صفحه قائم بعد از دوران بر صفحهٔ افق منطبق میشود (ش ٤) هر نقطه مانند A از صفحه قائم بوضع A′ در میآید و A A′ مساوی رقوم نقطه وعمود بر لولا است .

(ش ٤)

پس برای تسطیح خطی کافیست از دو نقطهٔ آن (ش ۵) دو عمود بر تصویر خط اخراج کنیم و مساوی رقوم آن نقاط بر عمود ها جدا نمائیم و نقاطی را که بدست میآیند بهم وصل کنیم .

(ش ۵)

۷ — عکس عمل تسطیح را ترفیع مینامند .

۸ — **تعیین شیب و اساس خط** — فاصله تصاویر دو نقطه که اختلاف رقومشان ۱ باشد اساس خط است (ش ٦). برای بدست آوردن شیب عکس اساس را میسازیم .

۹ — **تعیین رقوم نقطهٔ از خط** — ۱) بکمك تسطیح : تسطیح نقطه را بر تسطیح خط بدست میآوریم

(ش ٦)

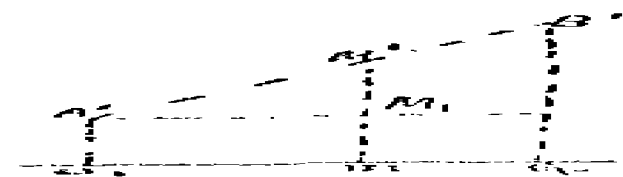
و $M'm$ را که مساوی رقوم A نست اندازه میگیریم.

۲) با محاسبه :

$$\frac{M'M'}{BB'} = \frac{A'M'}{A'B'} = \frac{am}{ab}$$

یا

$$\frac{\text{رقوم } M - \text{رقوم } A}{\text{رقوم } B - \text{رقوم } A} = \frac{am}{ab}$$

(ش۷)

رقوم M را که مجهول است بدست میآورند (ش۷)

عکس مسئله هم بدو راه مذکور قابل حل است.

۱۰ — **تعیین زاویه خط با صفحه مقایسه** — ۱) بکمک تسطیح ۲) بکمک محاسبه با استفاده از شیب یا اساس

۱۱ — **فاصله دو نقطه** — ۱) بکمک تسطیح ۲) بکمک محاسبه با استفاده از طول تصویر و اختلاف رقوم های دو نقطه.

وضع دو خط

۱۲ — **دو خط موازی** — دارای تصاویر موازی، اساس‌های مساوی و ترقی رقوم در یک جهت هستند.

۱۳ — **دو خط متقاطع** — تصاویر شان متقاطعند و نقطهٔ تقاطع در روی هردو تصویر یک رقوم دارد.

هرگاه تصاویر دو خط ab و cd یکدیگر را در خارج حدود شکل قطع کنند دو خط ca و bd را رسم میکنیم، اگر این دو خط متوازی یا متقاطع باشند دو خط ab و cd متقاطعند

وگرنه متنافرند .

رقوم نقطه تقاطع با محاسبه بدست میآید. بهتر اینست که چهار نقطه دو بدو متحدالرقوم دو خط را بهم وصل کنیم ، اگر دو خط واصل موازی شوند دو خط مفروض متقاطع خواهند بود.

III ـ صفحه

۱۴ – صفحه با سه نقطه یا دو خط متوازی یا متقاطع مشخص میشود .

۱۵ – صفحه افقی همه جا یك رقوم دارد. تصویر صفحه قائم یك خط است (اثر صفحه) .

۱۶ – افقیه های صفحه مقاطع آنند با صفحات موازی با افق . پس همه با یکدیگر موازیند . برای رسم یك افقیه کافیست دو نقطه متحدالرقوم از صفحه را بهم وصل کنیم .

۱۷ – خط بزرگترین شیب صفحه آن است که با تصویرش بزرگترین زاویه‌ای را بسازد که خطوط صفحه با تصاویرشان میسازند .

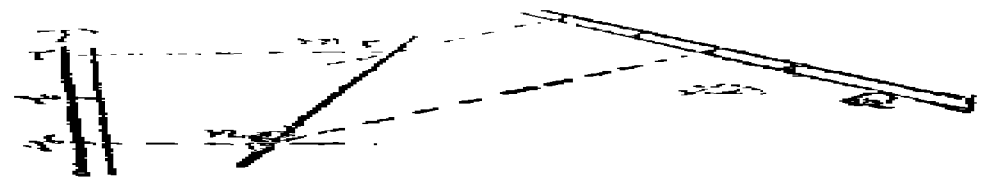
خط بزرگترین شیب صفحه عمودست بر افقیه ها . پس تصویر آن هم بر تصاویر افقیه ها عمودست .

خط بزرگترین شیب بتنهائی برای نمایش دادن صفحه کافیست (زیرا امتداد افقیه ها را بدست میدهد) . پس برای نمایش صفحه خط بزرگترین شیب آنرا که مدرج شده باشد بدو خط موازی نمایش میدهیم (ش۸). این خط را مقیاس شیب صفحه میگویند :

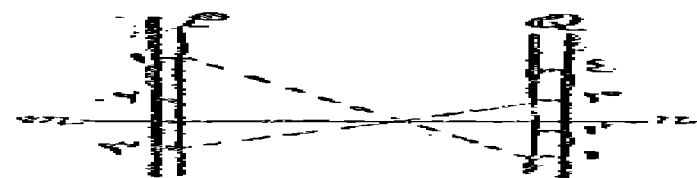
(ش۸)

۱۸ – **توازی خط و صفحه** – خط وقتی با صفحه موازیست که با یکی از خطهای آن متوازی باشد.

۱۹ – **توازی دو صفحه** – دو صفحه وقتی متوازیند که دو خط متقاطع یکی با دو خط از دیگری موازی باشند. برای موازی بودن دو صفحه کافیست مقیاس شیب‌های آنها متوازی باشند.

۲۰ – **تقاطع صفحات** – برای پیدا کردن فصل مشترک دو صفحه چهار افقیه دو بدو هم رقوم آنها را امتداد میدهیم تا همدیگر را در نقطهٔ m و n قطع کنند m_2 n_4 فصل مشترک دو صفحه است (ش ۹)

(ش ۹)

هرگاه تصاویر مقیاس شیب های دو صفحه موازی باشند چهار نقطه دو بدو متحدالرقوم آنها را بهم وصل میکنیم تا یکدیگر را در a تلاقی کنند.

افقیه ای که بر a بگذرد فصل مشترک مطلوب است (ش ۱۰)

(ش ۱۰)

۲۱ – **تقاطع خط و صفحه** – برای بدست آوردن فصل مشترک خط ab و صفحه P (ش ۱۱) بر خط یک صفحه اختیاری مرور میدهیم و بکمک افقیه‌های ۱ و ۳ آن فصل مشترک را با صفحه P بدست میآوریم. این فصل مشترک خط ab را در m قطع میکند.

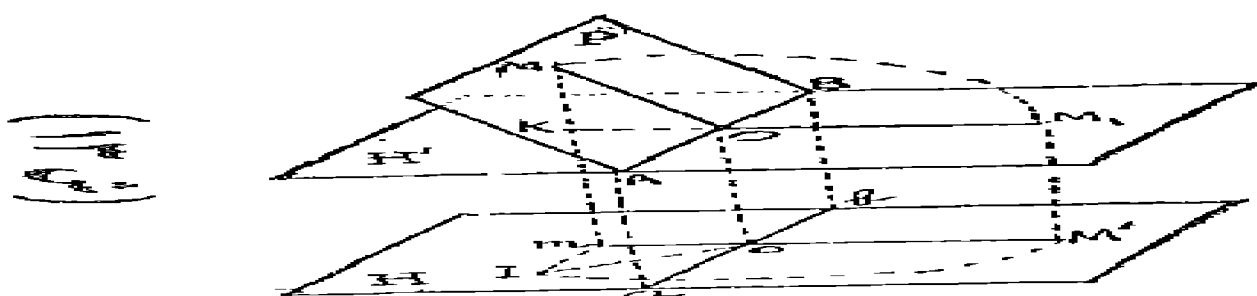
m محل تلاقی ab با صفحه P است.

(ش ۱۱)

۲۲ – **خط عمود بر صفحه** –

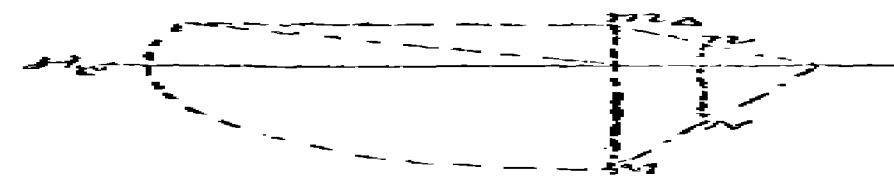
قضیه - اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد تصویرش موازی مقیاس شیب صفحه، شیبش عکس شیب آن و ترقی رقومش در جهت عکس ترقی رقوم آن میباشد. مانند خط ab و صفحه P (ش ۱۲)

IV - تسطیح

۲۳ - تسطیح یک شکل مستوی عبارت از آنستکه صفحه شکل را حول یک خط افقی خود، بنام لولا، آنقدر دوران دهیم تا موازی صفحه افق شود.

اگر صفحه P حول افقیه رقوم ۴ AB دوران کند وضع یک نقطه M از آنرا در نظر میگیریم. m تصویر M است و بعد از دوران بوضع M_1 درمیآید (ش ۱۳) که تصویر آن (یا باصطلاح تسطیح M) نقطه M' است.

وتر سه بر قائم $OMK = OM = OM_1$ ، $OM' = OM_1$

بعلاوه OM' موازی OM و عمود است بر ab پس تسطیح نقطه بر روی عمودیست که از تصویر نقطه بر لولا فرود آید و فاصله آن از لولا مساوی وتر سه بر قائمی است که یک ضلعش (KO) مساوی فاصله تصویر نقطه از لولا و ضلع دیگرش (KM) مساوی اختلاف ارتفاع نقطه و لولا باشد.

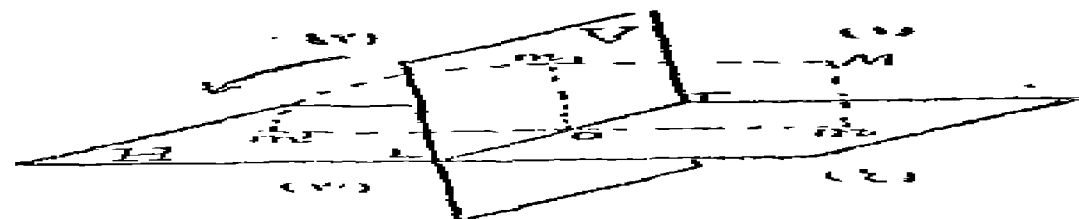
پس تسطیح نقطه m_5 در حول لولای $a_4 b_4$ نقطه M' است (ش ۱۴)

بن قاعده را قاعده سه بعدی قائم گویند. چون m و تسطیحش در دست باشند هر نقطه دیگر مانند n (ش ١٤) را بکمك آن تسطیح میکنیم.

٢٤ — ترفیع عکس عمل تسطیح است.

(ش ١٤)

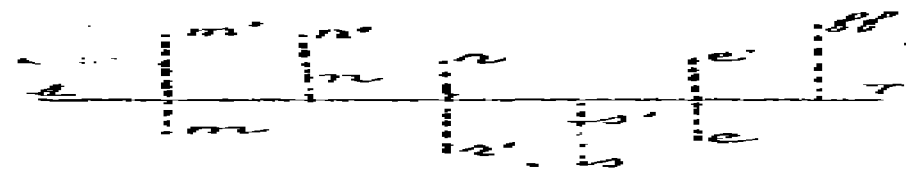
٢٥ — برای اینکه در روی شکلی ابعاد و زوایا بمقدار حقیقی معلوم شوند باید آنرا تسطیح کرد.

٢٦ — صفحه را عموماً حول یکی از افقیه های آن تسطیح میکنند.

٢ - اصول هندسه ترسیمی

٢٧ — صفحات تصویر عبارتند از صفحه افقی (H) و صفحه قائم (V) عمود بر آن. L.T. فصل مشترك دو صفحه را خط الارض میگویند. فاصله نقطه m از صفحه افق ارتفاع و از صفحه قائم بعد نام دارد.

(ش ١٥)

بالای صفحه افق ارتفاعات مثبت و زیر آن منفی و جلو صفحه قائم بعدها مثبت و عقب آن منفی میباشند همیشه وقتی بالای صفحه افق و رو بروی صفحه قائم بایستیم در روی فصل مشترك دو صفحه (خط الارض) L را طرف چپ و T را طرف راست میتوانیم ببینیم (ش ١٥) و اگر این ترتیب عوض شود جهت مثبت بعد ها و ارتفاعها تغییر میکنند. پس از اینکه نقطه M را بر

H و V تصویر کردیم V را در جهت مثلثاتی ۹۰ درجه دوران میدهیم تا بر افق منطبق شود و تصویر قائم نقطه بوضع 'm در آید . حال چون LT را روی صفحه کاغذ بکشیم بالای آن جای ارتفاعهای مثبت و بعدهای منفی و زیر آن جای بعدهای مثبت و ارتفاعهای منفی است .

تصاویر قائم و افقی هر نقطه بر روی یك رابط (خط عمود بر LT) واقعند .

(ش ۱۶)

تصویر افقی را با حرف کوچك لاتینی و تصویر قائم را با همان حرف با علامت (') نمایش میدهند (ش ۱۶) .

۱ – نقطه

۲۸ – صفحات تصویر فضا را بچهار ناحیه تقسیم میکنند در ناحیه اول بعد و ارتفاع مثبت (نقطه 'mm ش ۱۶) ، در دوم بعد منفی و ارتفاع مثبت (نقطه 'nn) ، در سوم بعد و ارتفاع منفی (نقطه 'rr) و در چهارم بعد مثبت و ارتفاع منفی است (نقطه 'ss) .

نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی اول و سوم دارای بعد و ارتفاع مساوی و متحد العلامه اند یعنی تصاویر شان نسبت به LT قرینه یکدیگر ند (نقطه 'ee) ، تصاویر نقاط واقع در صفحه منصف فرجه نواحی دوم و چهارم بر یکدیگر منطبقند ، زیرا بعد و ارتفاعشان مساوی و مختلف العلامه میباشند 'ff .

۴ ـ خط مستقیم

۲۹ ــ خط مستقیم بوسیله تصاویر قائم و افقی که بیك حرف بزرگ لاتینی خوانده میشوند نمایش داده میشود ، مانند خط AA' (ش ۱۷)

۳۰ ــ خطوط مهم عبارتند از :

خط افقی موازی صفحه افق ، تصویر قائمش موازی خط الارض است .

خط جبهی موازی صفحه قائم ، تصویر افقیش موازی خط الارض است .

خط قائم عمود بر صفحه افق ، تصویر افقیش یك نقطه و تصویر قائمش عمود ست بر خط الارض .

خط منتصب عمود بر صفحه قائم ، تصویر قائمش یك نقطه و تصویر افقیش عمود ست بر خط الارض .

خط نیمرخ عمود بر خط الارض ، تصاویرش بر امتداد یکدیگر عمود بر خط الارضند .

خط مواجه موازی خط الارض ، تصاویرش هم موازی خط الارضند .

هر خط بوسیلهٔ تصاویرش مشخص میشود مگر نیمرخ که باید اقلا دو نقطه آن مشخص باشد .

برای حل مسائل مربوط بخط نیمرخ باید آنرا تسطیح کرد (رجوع شود بشماره ۶)

۳۱ ــ **نقاط مهم خط** عبارتند از :

اثر افقی که برای بدست آوردنش تصویر قائم خط را امتداد میدهیم تاخط الارض راقطع کند .

اثر قائم از برخورد تصویر افقی با خط الارض مشخص میشود .

نقطه تلاقی خط و منصف فرجه اول از تلاقی قرینه یکی از تصاویر خط با تصویر دیگر مشخص میشود .

نقطه تلاقی با منصف فرجه دوم از تلاقی تصاویر خط مشخص میشود .

۳۲ — توازی دو خط — تصاویر همنامشان متوازیند .

۳۳ — تقاطع دو خط — تصاویر همنامشان متقاطعند و دو نقطهٔ تقاطع بر یك رابط واقعند .

برای تحقیق اینکه دو خط که تصاویرشان در خارج حدود شکل متقاطعند یکدیگر را قطع میکنند یا نه دو نقطه یکی را بدو نقطه دیگری وصل میکنیم ، اگر دو خط که باین طریق بدست میآیند متقاطع یا متوازی باشند دو خط مفروض هم متقاطعند .

۳۴ — توازی دو نیمرخ نیز بنحو فوق تحقیق میشود .

۳ — صفحه

۳۵ — صفحه مانند هندسه، بادو خط متقاطع یا متوازی یا سه نقطه غیر واقع بر یك استقامت یا یك خط و نقطه مشخص میشود .

۳۶ — خطوط مهم صفحه عبارتند از :

اثر افقی ، که تصویر قائمش بر روی خط الارض است.

اثر قائم ، « « افقیش « « «

این دو اثر یا با هم موازیند یا یکدیگر را در روی xy

قطع میکنند.

نمایش صفحه بوسیله آثار بهترین طریق نمایش آنست.

افقیه ها که تصاویر افقیشان موازی اثر افقی است.

جبهیه ها » » قائمشان » » قائم است.

خط بزرگترین شیب نسبت بصفحه افق که تصویر افقیش عمود است بر اثر افقی.

خط بزرگترین شیب نسبت بصفحه قائم که تصویر قائمش عمود است بر اثر قائم.

۳۷ — **صفحات مهم** عبارتند از:

صفحه افقی، اثر افقی ندارد، اثر قائمش موازی خط الارض است.

صفحه جبهی، اثر قائم ندارد، اثر افقیش موازی خط الارض است.

صفحه قائم، اثر قائمش عمود بر خط الارض (تصاویر افقی جمیع خطوط و نقاطش بر اثر افقی آن واقع میشوند)

صفحه منتصب، اثر افقیش عمود بر خط الارض (تصاویر قائم جمیع خطوط و نقاطش بر اثر قائم آن واقع میشوند)

صفحه نیمرخ، آثارش بر یک امتداد و عمودند بر خط الارض

صفحه مواجه، موازی خط الارض و آثارش هم با آن موازی هستند

مسائل مربوط بصفحه نیمرخ بوسیله تسطیح صفحه حل میشوند.

۳۸ — **توازی خط و صفحه** — خط وقتی با صفحه موازی است که با یکی از خطوط آن موازی باشد .

۳۹ — **خط عمود بر صفحه** — تصویر افقیش عمود است بر اثر افقی و تصویر قائمش بر اثر قائم صفحه .

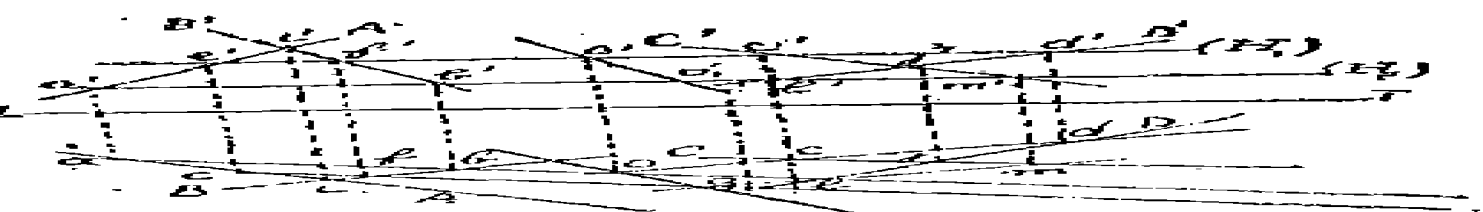
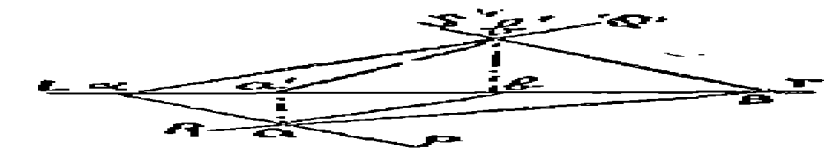
۴۰ — **فصل مشترک دو صفحه**

فصل مشترک دو صفحه را بوسیله رسم دو صفحه کمکی بدست میآورند بدینطریق که با هر صفحه کمکی یک نقطه از فصل مشترک را تعیین میکنند ، صفحات کمکی بیشتر عبارتند از صفحات تصویر ، صفحات قائم یا منتصب و افقی یا جبهی .

مثلاً : فصل مشترک دو صفحه که با آثارشان نموده شده باشند (ش ۱۸) بکمک صفحات تصویر - فصل مشترک دو صفحه که هر یک بدو خط متقاطع نموده شده باشند (ش ۱۹) بکمک دو صفحه افقی - فصل مشترک دو صفحه مواجه (ش ۲۰) بکمک یک صفحه قائم .

(ش ۱۹)

۴۱ — **فصل مشترک خط و صفحه**

بر خط یک صفحه فرعی مرور میدهیم (معمولاً قائم یا منتصب) ، فصل مشترک دو صفحه خط مفروض را در نقطهٔ (O) قطع میکند (ش ۲۱) ، این نقطه فصل مشترک خط و صفحه است .

٤ – تغییر مکانها

۴۲ – مقصود از تغییر مکان دادن یک شکل مستوی اینست که آنرا با یک صفحه تصویر (یا یک صفحه تصویر موازی آن) قرار دهیم تا تصویر جدید شکل با خود آن مساوی شود و بتوانیم از روی آن خواص و ابعاد و زوایای شکل را مطالعه کنیم. تغییر مکانها بر سه قسمند: تغییر صفحه، دوران، تسطیح.

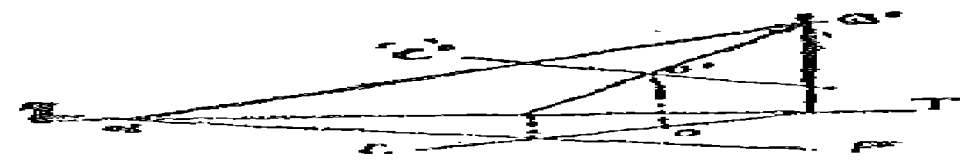
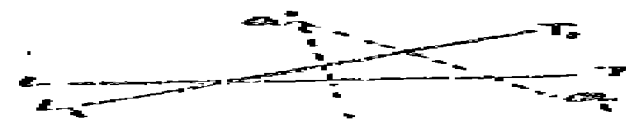
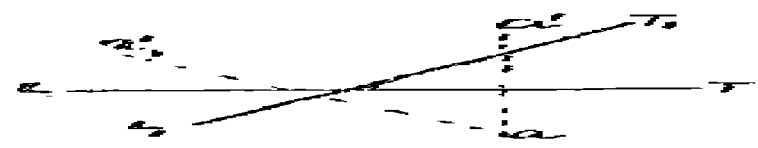
(ش ۲۱)

۱ – تغییر صفحه

۴۳ – در تغییر صفحه صفحه افقی یا قائم تصویر را موازی صفحه شکل قرار میدهیم و صفحه دیگر ثابت میماند. هر تغییر صفحه بوسیله وضع جدید خط الارض مشخص میشود.

۱ – **تغییر صفحه افق** – در این تغییر چون صفحه قائم تغییر نمیکند تصاویر قائم نقاط و بعدهای آنها ثابت میمانند و فقط تصاویر افقی و ارتفاعات تغییر میکنند. پس برای بدست آوردن تصاویر افقی جدید باید از تصاویر قائم (که ثابتند) عمودهائی بر خط الارض جدید کشید و بعد آنها ابعاد را (که ثابتند) جدا نمود (ش ۲۲).

(ش ۲۲)

ب — **تغییر صفحه قائم** — در این تغییر صفحه تصاویر افقی و ارتفاعات ثابت میمانند

و تصاویر قائم و ارتفاعات تغییر میکنند (ش ۲۳)

ب — **تغییر صفحه مضاعف** — یعنی اول یکی از صفحات تصویر و بعد صفحه دیگر را تغییر داد. این عمل ترکیب دو عمل سابق است. مثلا در شکل ۲۴ نخست صفحه افق و بعد صفحه قائم را تغییر میدهیم.

(ش ۲۳)

(ش ۲۴)

توجه کنید! — در موقع تغییر صفحه باید متوجه علامت بعدها و ارتفاعات و وضع خط الارض جدید بود یعنی اگر را طرف چپ خط الارض قرارداده شود بعدهای مثبت زیر و ارتفاعات مثبت بالای آن واقع میشوند، و اگر را طرف راست بگذاریم عکس این ترتیب خواهد شد.

۴۴ — **صفحه افق (یا قائم) را موازی خطی باید** قرار داد — خط افقی (یا جبهی) میشود، پس خط الارض جدید باید موازی تصویر قائم (یا افقی) خط مفروض قرار داده شود.

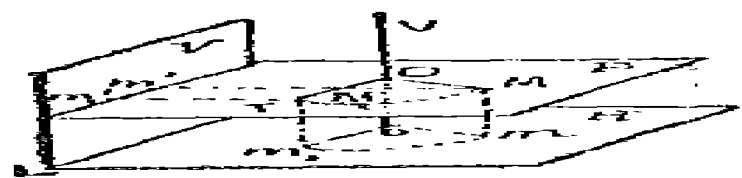
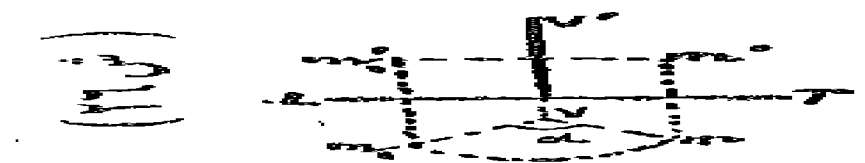
۴۵ — **صفحه افق (یا قائم) را عمود بر صفحه ای باید** قرار داد — صفحه قائم (یا منتصب) میشود، پس خط الارض جدید باید عمود بر اثر قائم (یا افقی) صفحه اختیار شود.

۴۶ — **خطی را عمود بر صفحه افقی (یا قائم) باید** قرار داد — نخست بایستی خط را موازی صفحه قائم (یا افق) کرد، بعد آن را عمود بر صفحه افق (یا قائم) نمود (تغییر صفحه مضاعف).

۴۷ – صفحهٔ ایر اعمود بر صفحه افق (یا قائم) باید قرار داد — نخست باید صفحه را عمود بر صفحه قائم (یا افق) کرد بعد موازی صفحه افق (یا قائم) نمود (تغییر صفحه مضاعف).

ب – دوران

۴۸ – دوران نقطه – هرگاه نقطه‌ای حول محوری عمود بر یک صفحه (مثلاً افق) باندازه زاویهٔ α دوران کند تصویر آن بر آن صفحه در صفحه بهمان اندازه دوران میکند و تصویر دیگر بر صفحه دیگر (قائم) در روی خطی موازی خط‌الارض تغییر مکان میدهد (ش ۲۵).

(ش ۲۵)

پس در دوران نقطه حول محور قائم تصویر افقی بمقدار حقیقی دوران میکند و تصویر قائم در روی خطی موازی ‌LT حرکت مینماید (ش ۲۶a) و در دوران حول محور منتصب تصویر قائم بمقدار حقیقی دوران نموده تصویر افقی موازی خط‌الارض تغییر مکان میدهد.

(ش ۲۶)

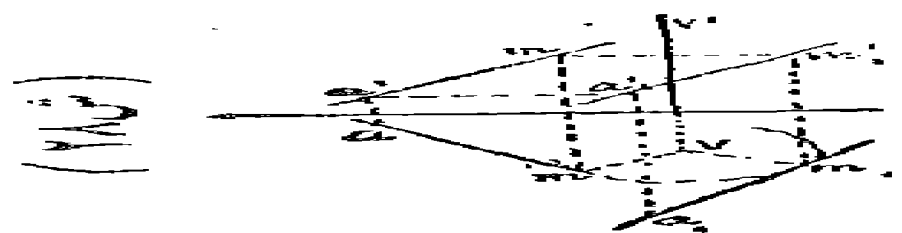
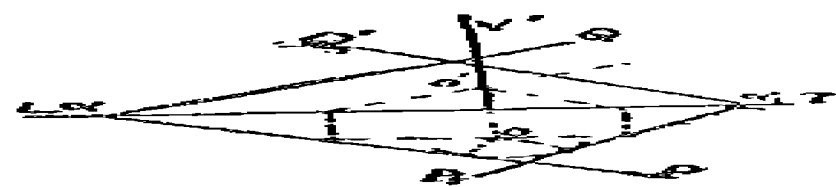
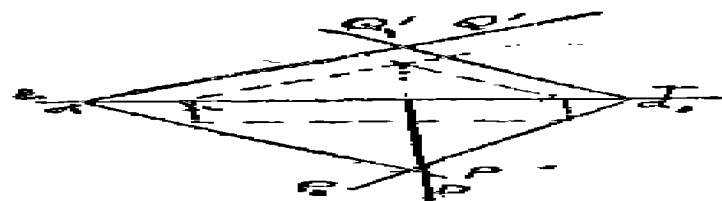
۳۹ – دوران خط – البته برای دوران خط کافیست دو نقطهٔ آنرا دوران داد (ش ۲۷).

[illegible] با [illegible] مساوی است.

و دیگر اینست که عمود مشترک محور و خط را رسم کنیم و موقع آن آنرا باندازهٔ زاویهٔ مطلوب دوران

(ش ۲۷)

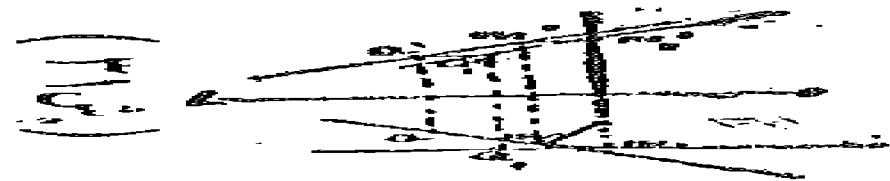
دهیم و وضع جدید خط را بوسیله رسم عمود بر وضع جدید عمود مشترك مشخص کنیم . آنگاه تصویر قائم را بوسیلهٔ تعیین اوضاع جدید تصاویر نقطهٔ دیگر معین نمائیم (ش ۲۸)

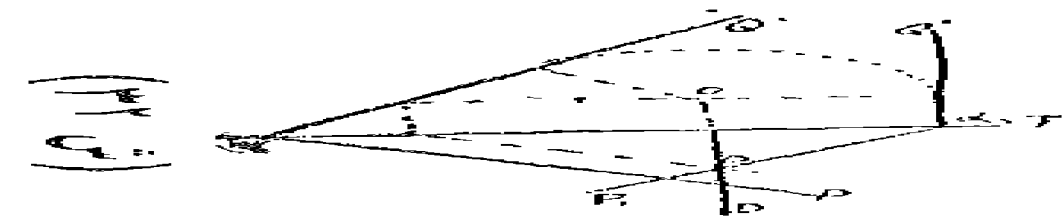
(۲۸ ش)

۵۰ - دوران صفحه - باید یك نقطه و یك خط از صفحه را دوران داد. ولی معمولاً نقطه تلاقی محور با صفحه را که حین دوران ثابت میماند در نظر گرفته یك خط از صفحه را (معمولاً اثر قائم را اگر محور قائم باشد و اثر قائم را اگر محور منتصب باشد) باندازه زاویه مطلوب دوران میدهیم . اگر یکی از آثار را دوران دهیم، برای تعیین اثر جدید دیگر از امتداد جبهیه یا افقیه‌ای که بر محل تلاقی محور و صفحه میگذرد استفاده میکنیم (ش ۲۹ و ۳۰)

(ش ۲۹) (ش ۳۰)

۵۱ - خطی را دوران دهید تا جبهیه شود

باید تصویر افقی خط موازی خط الارض گردد . پس

باید خط را حول محور قائم دوران داد تا وقتی تصویر افقیش موازی LT شود (ش ۳۱)

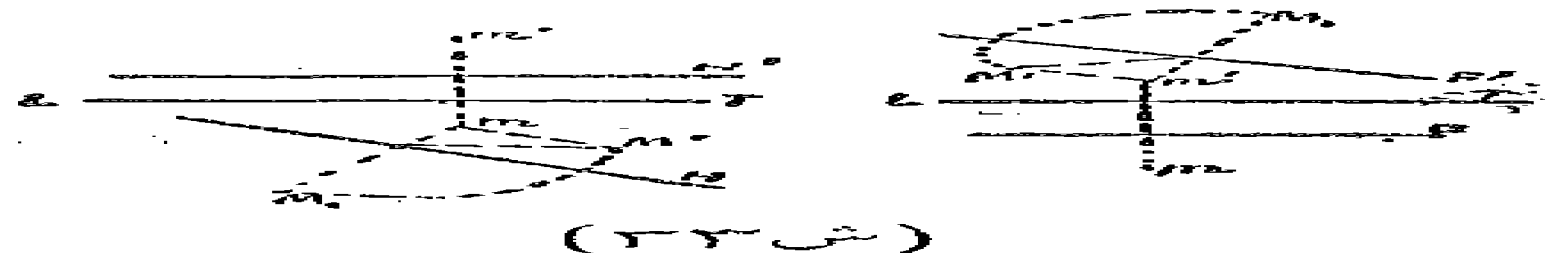
۵۲ – صفحه‌ای را دوران دهید تا قائم شود

باید اثر قائم بر خط الارض عمود گردد. پس باید صفحه حول محور منتصب آنقدر دوران کند که اثر قائمش بر LT عمود شود. (۳۲)

۵۳ – توجه کنید!

برای اینکه خطی موازی با صفحه‌ای عمود بر یک صفحه تصویر شود یک دوران یا یک تغییر صفحه لازم است و برای اینکه خطی عمود یا صفحه‌ای موازی یک صفحه تصویر شود باید دو دوران یا دو تغییر صفحه داد یعنی اول خط را موازی یک صفحه تصویر و بعد عمود بر صفحه دیگر نمود یا اول صفحه را عمود بر یک صفحه تصویر و بعد موازی با صفحه دیگر کرد.

پ – تسطیح

۵۴ – تسطیح یعنی موازی قرار دادن یک شکل مستوی با صفحه افق یا صفحهٔ قائم.

برای این کار باید صفحه شکل را حول یک خط افقی یا جبهی بنام لولا آنقدر دوران داد تا موازی صفحه افق یا قائم شود. تسطیح هر نقطه بر روی عمودیست که از تصویر آن بر لولا فرود آید و فاصله‌اش از لولا وتر مثلث قائمیست که یک ضلع آن فاصله تصویر آن نقطه از لولا و ضلع دیگرش اختلاف

ارتفاع (یا بعد) نقطه و اولا باشد (رجوع شود بشماره ۲۳)
پس برای تسطیح یک نقطه حول یک افقیه (جبهیه)
از تصویر افقی (قائم) نقطه خطی موازی اولا رسم و برروی
آن باندازه اختلاف ارتفاع (بعد) نقطه و اولا جدا میکنیم و نیز
از تصویر نقطه عمودی بر اولا فرود میآوریم و برامتداد آن
طولی مساوی وتر سه بر قائمیکه برروی دوخط مرسوم ساخته
شده باشد جدا مینمائیم (ش ۳۳) (قاعده سه بر قائم). نقاط دیگر
را بکمك آن نقطه تسطیح میکنیم .

(ش ۳۳)

باید متوجه بود که نقاطیرا میتوان بکمك تسطیح نقطه
A حول یك افقیه یا جبهیه تسطیح کرد که با آن نقطه و اولا
در یك صفحه باشند .

۵۵ – ترفیع عکس عمل تسطیح است .

۵۶ – تسطیح خط – کافیست دو نقطه آنرا تسطیح کرد
و بکمك آنها خط را تسطیح نمود . هرخط موازی اولا باشد
تسطیحش هم با اولا موازیست . تسطیحات خطوط متوازی
متوازیند .

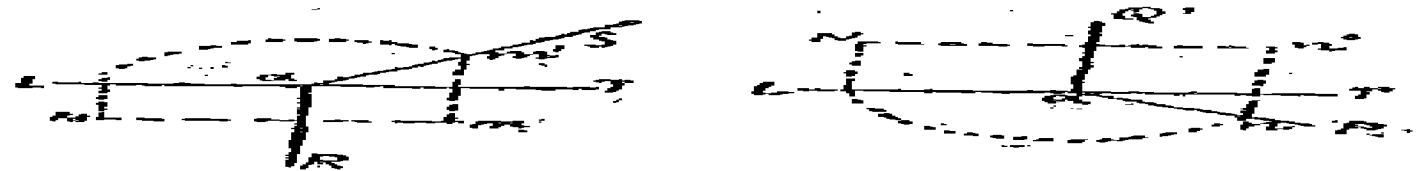
۵۷ – تسطیح صفحه – معمولا صفحه را حول اثر افقی یا

قائم آن تسطیح میکنند و برای اینکار تسطیح اثر قائم را حول اثر افقی (ش ۳۴) یا تسطیح اثر افقی را حول اثر قائم (ش ۳۵) بدست آورده سایر نقاط مانند 'mm را بمدد آن تسطیح مینمائیم .

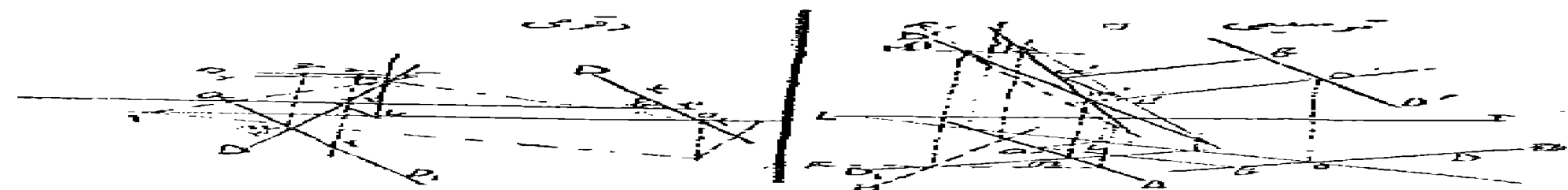
(ش ۳۵) (ش ۳۴)

برای تسطیح اثر قائم حول اثر افقی یك نقطه، اما نند 'aa، را اختیار نموده از a عمودی بر اثر فرود میآوریم و بمرکز α و شعاع αa قوسی میزنیم تا عمود را در A قطع کند . αA تسطیح اثر قائم است .

۵۸ - قرارداد - تسطیح خط را همیشه با خط نقطه نمایش میدهند .

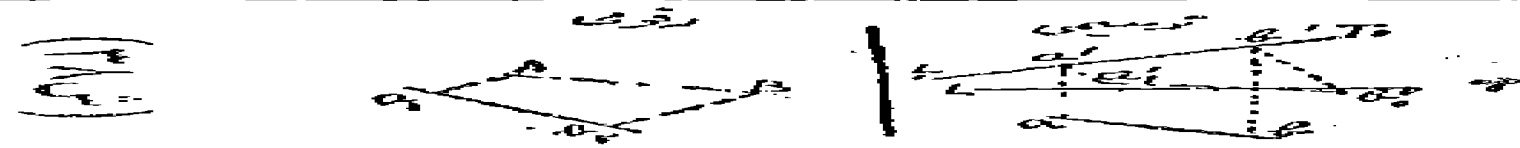
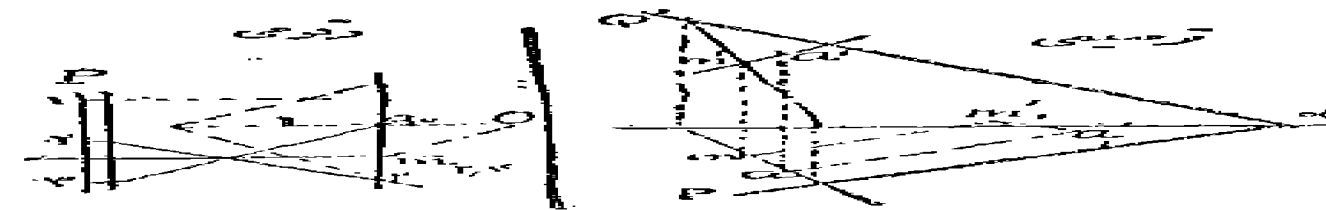
۵۹ - تسطیح صفحهٔ قائم یا منتصب - برای تسطیح 'mm از صفحهٔ قائم (یا 'mm از صفحهٔ منتصب) (ش ۳۶) از m یا 'n عمودی بر اولا فرود میآوریم و بمرکز a و شعاع 'am یا aa قوسی میزنیم تا خط الارض را در K قطع کند از K عمودی بر XY اخراج مینمائیم تا عمودی را که بر اولا وارد آمده است در N یا M قطع کند . N یا M نقطه مفروض است .

(ش ۳۶)

۴ - موارد استعمال

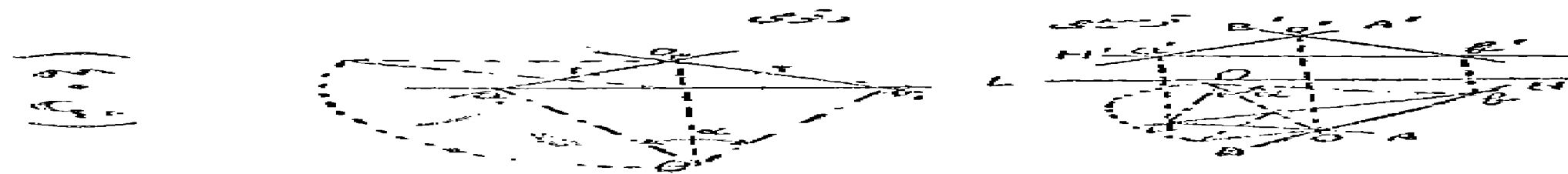
۶۰ - عمود مشترک دو خط - برای رسم عمود مشترک دو خط △ و △′ بر △ صفحه‌ای موازی △′ میگذرانیم و از یک نقطهٔ M از △′ عمودی بر آن صفحه فرود میآوریم تا آنرا در A قطع کند ، از A خطی موازی △′ میکشیم تا △ را در B قطع نماید خطی BC که موازی MA رسم شود جواب مسئله است .

(ش ۳۷)

۶۱ — فاصله دو نقطه A و B - در ترسیمی بکمک تغییر صفحه یا دوران و در رقومی بوسیله تسطیح خط واصل بین دو نقطه معلوم میشود (ش ۳۸)

رقومی | ترسیمی

(ش ۳۸)

۶۲ – **فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ P** – عمود AO را که موقع آن در صفحه O است بر P وارد آورده فاصلهٔ نقاط A و P را معین میکنیم (ش ۳۹)

(ش ۳۹)

۶۳ – **فاصلهٔ نقطه از خط** – صفحه‌ای بر آن خط عمود کرده O نقطه برخورد را بدست میآوریم و فاصله M از O را اندازه میگیریم.

۶۴ – **زاویهٔ دو خط** – بوسیله تسطیح دو خط موازی صفحهٔ تصویر قرار داده میشوند (ش ۴۰)

(ش ۴۰)

۶۵ - زاویه خط و صفحه - یعنی زاویه خط با تصویرش بر صفحه .

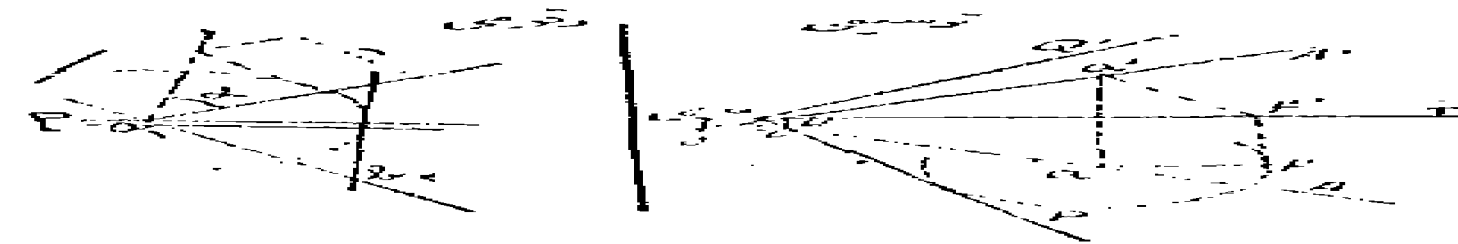
۶۶ - زاویه دو صفحه - صفحه‌ای بر فصل مشترک آنها عمود نموده فصل مشترک آنرا با هر یک از آن دو پیدا میکنیم (ش ۴۱) ، زاویهٔ بین دو فصل مشترک زاویهٔ بین دو صفحه است

(ش ۴۱)

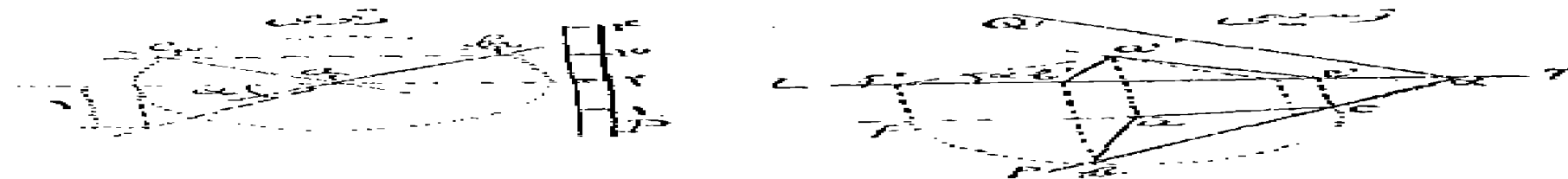
۶۷ - برخطی صفحه‌ای بگذرانید که با صفحه افق زاویه α تشکیل دهد .

هندسه رقومی : بمرکز a و شعاع برابر با $Cotg\alpha$ دایره‌ای میزنیم و از b برآن دایره رسم میکنیم ، شعاعی از دایره که بر این مماس عمود شود مقیاس شیب صفحه مطلوب بست (ش ۴۲)

هندسه ترسیمی : dd' اثر افقی خط $\triangle\triangle'$ را تعیین میکنیم از یک نقطه aa' جبهه‌ای که با صفحه افق زاویه α بسازد رسم نموده cc' اثر افقی آنرا بدست میآوریم ، بمرکز a و شعاع ac دایره‌ای ترسیم نموده از d مماسی برآن رسم میکنیم این مماس اثر افقی صفحه مطلوب بست (ش ۴۲) اثر قائم آن بر اثر قائم خط $\triangle'$ نیز میگذرد .

(ش ٤٢)

۶۸ — در صفحه‌ای از یك نقطه خطی رسم کنید که با صفحهٔ افق زاویهٔ α بسازد .

هندسهٔ رقومی — بمرکز a و شعاع p = cotg α دایره‌ای میزنیم تا افقیه رقوم ۲ صفحه را در b و c قطع کند. ab و ac دو جواب مسئله‌اند (ش ٤٣)

(ش ٤٣)

هندسهٔ ترسیمی : از a'a'' جبهه‌ای رسم میکنیم که با افق زاویهٔ α بسازد ، a'f' را افقی آن را بدست می‌آوریم بمرکز a و شعاع af دایره‌ای میزنیم تا اثر H^{α} را در b و c قطع کند a'b'a'' و a'c'a'' جوابهای مسئله‌اند (ش ٤٣)

۶۹ — زاویه صفحه باصفحات تصویر - هندسه رقومی : برای تعیین زاویه صفحه P با صفحه افق کافیست زاویه تسطیح مقیاس شیب صفحه را با تصویر آن بدست آورد (ش ٤٤) .

هندسه ترسیمی : برای اینکه زاویه صفحه Q′P‌ ‌α را با صفحه افق (قائم) تعیین کنیم بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) آنرا بصفحه منتصب (قائم) تبدیل میکنیم و زاویه اثر قائم (افقی) را با خط الارض اندازه میگیریم (ش ٤٥ ، ۱ و ۲)

ش ٤٤ ۱ ش ٤٥ ۲

۷۰ - زاویه خط باصفحات تصویر

هندسه رقومی : زاویه خط و تسطیح آن .

هندسه ترسیمی - برای آنکه زاویه خط ′DD را با صفحه افق (قائم) تعیین نمائیم آنرا بوسیله تغییر صفحه قائم (افقی) تبدیل بخط جبهی (افقی) میکنیم و زاویه تصویر قائم (افقی) را باخط الارض اندازه میگیریم .

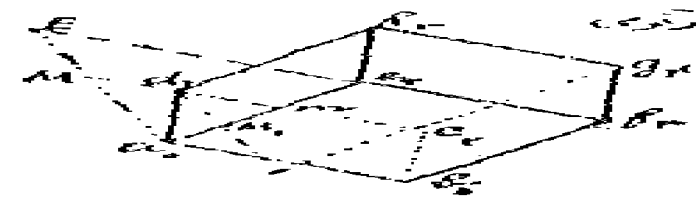
۷۱ - نمایش چند روها . برای آنکه چند روئی را بوسیله تصاویرش نمایش دهند تصاویر رؤس و اضلاع را

رسم میکنند . تصاویر تمام رؤس و اضلاع در داخل خط شکسته مسدودی واقعند که دوره ظاهری نامیده میشود .

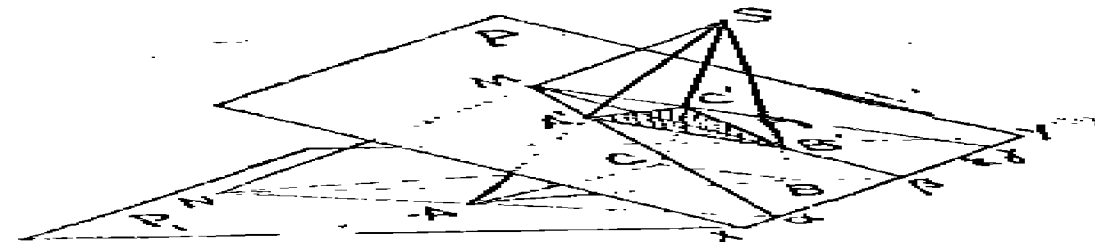
خطوط واقع در درون دوره ظاهری برخی مرئی و بعضی مخفی میباشند .

برای تشخیص خطوط مرئی از مخفی فرض میکنیم چشم بفاصله بی نهایت دور از صفحه تصویر واقع باشد در نتیجه خطی که از محل تقاطع ظاهری دو خط واقع در درون دوره ظاهری بجسم وصل شود بر صفحه تصویر عمود میشود . این خط دو یال جسم را که تصاویرشان متقاطعند قطع میکنند ، هر یك از دو یال که نقطه تقاطع آن از صفحه تصویر دور تر باشد مرئی و دیگری مخفی است . پس از دو یال متنافر که تصاویرشان متقاطع باشند در تصویر افقی آنکه ارتفاع نقطه تقاطع (و در تصویر قائم اینکه بعد نقطه تقاطع) بر آن بیشتر است مرئی است . هر یال که بیك نقطه غیر مرئی و هر صفحه که بیك یال غیر مرئی محدود گردد غیر مرئی میباشد .

مثال :

(ش ٤٦٦)

ارتفاع m روی cd کمتر است تا روی ae ، پس ae و در نتیجه fe و eh مرئی هستند .

۷۲ - **مقطع اجسام** — مقطع هر صفحه در یک چند رو چند بری است که رؤس ش فصل مشترک یالهای چند رو با صفحه و اضلاعش فصل مشترک روهای جسم با صفحه اند . پس برای بدست آوردن مقطع بدو طریق میتوان عمل کرد : ۱) تعیین رؤس ۲) تعیین اضلاع .

(ش ٤٧)

آ — **تعیین رؤس** - اگر بخواهیم فصل مشترک صفحه P (ش ٤٧) را با هرم SABC پیدا کنیم xy فصل مشترک P با قاعده جسم را بدست میآوریم بعد خطی بر S میگذرانیم تا P و صفحه قاعده را در M و N قطع کند از N به رؤس قاعده وصل نموده امتداد میدهیم تا xy را در α و β قطع نمایند از α و β به N وصل مینمائیم تا یالهای منتهی برؤس وابسته را تلاقی نمایند. این نقاط رؤس مقطعند .

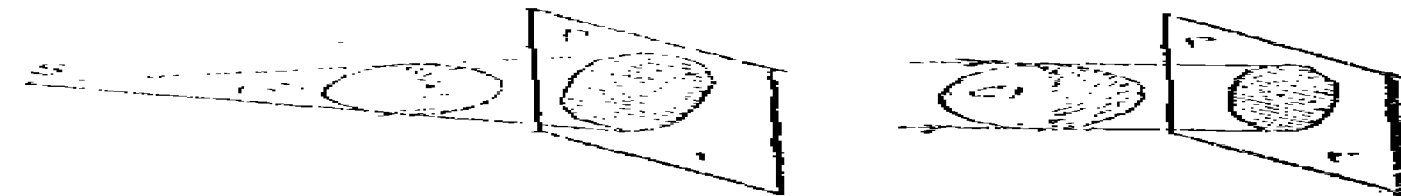
ب - **تعیین اضلاع** — در این طریقه باید فصل مشترک یکایک روهای جسم را با صفحه قاطع بدست آوریم؛ قسمتی از فصل مشترکها که در خارج وجوه جسم واقع شوند جزء مقطع نیستند.

۷۳ — **فصل مشترک خط با چند رو** — برای بدست آوردن فصل مشترک خط △ با یک جسم، که نقاط ورود و خروج

خط در جسم نامیده میشوند ، بر△ صفحه اختیاری گذرانیده مقطع آنرا با جسم بدست میآوریم ، نقاط برخورد△ با محیط مقطع نقاط مطلوبند .

اگر جسم دارای رأس باشد ، مانند هرم ، صفحه فرعی را عموماً بر رأس جسم میگذرانند و هرگاه جسم یالهای موازی داشته باشد ، مانند منشور ، صفحه فرعی را معمولاً بموازات آن یال مرور میدهند و در هر حال نقاط مشترک صفحه فرعی را با محیط قاعده جسم بدست آورده از نقاط تقاطع بر رأس (در حالت اول) وصل میکنند ، یا خطوطی موازی یال (در حالت دوم) میکشند تا△ را قطع کنند ، نقاط تقاطع محل تلاقی خط با جسم میباشند .

۷۴ — سایه‌ها — اگر جسمی درمقابل یک نقطه نورانی (ش ۴۸ ، ۱) یا در سر راه یکدسته شعاعهای نورانی (ش ۴۸ ، ۲) قرار گیرد قسمتی از خود جسم تاریک است (سایه خاص) و قسمتی از هر صفحه که درمقابل جسم باشد نیز در سایه است (سایه منتقل)

ش ۴۸

اشعه‌ای که بجسم میتابند در صورت اول مخروط و در

صورت دوم استوانه‌ای تشکیل میدهند که مخروط یا استوانهٔ سایه نام دارند.

درحالت اول سایه را مشعلی و درحالت دوم آنرا شمسی مینامند.

دوره ظاهری سایه منتقل سایه خطی است که مخروط یا استوانهٔ سایه درامتداد آن برجسم مماس گردیده است. سایهٔ سایر رؤس و یالهای جسم در داخل دورهٔ ظاهری واقع میشوند.

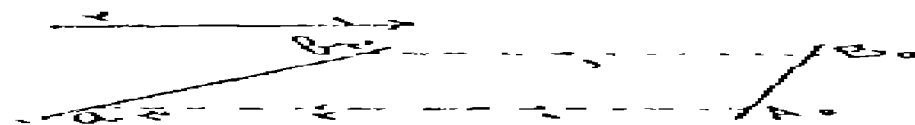
ازدو یال متنافر که سایه های آنها دردرون دورهٔ ظاهری سایه متقاطع میشوند یکی روشن ودیگری تاریک است. برای تشخیص آن که روشن است فصل مشترك شعاع نورانی منتهی بنقطه تقاطع سایه‌ها را با یالها بدست میآوریم یالی که نقطه تقاطعش بمنبع نور نزدیکتر باشد روشن است.

اگر سایه منتقل یالی در داخل دورهٔ ظاهری واقع شود برحسب آنکه یال روشن یا تاریك باشد دو روی منتهی بآن روشن یا تاریك خواهند بود.

درصورتیکه سایه رأسی درون دوره ظاهری افتد برحسب آنکه رأس روشن یا تاریك باشد یالهای منتهی بآن روشن یا تاریك خواهند بود.

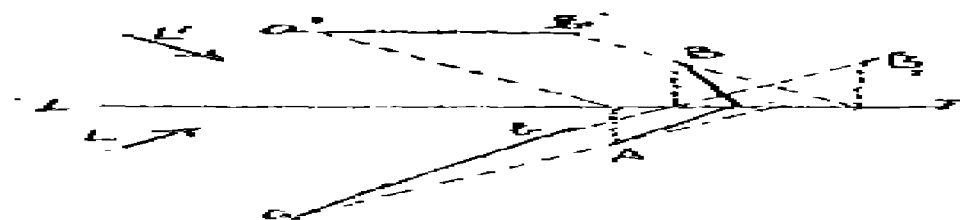
مثال — سایه منتقل ۸-۲۰ را بموازات امتداد نیر برصفحه تصویر معین کنید.

رقومی

ش ۴۹

ترسیمی

ممکن است قسمتی از سایه یک یال، مانند (ab) بر صفحهٔ افق و قسمتی بر صفحه قائم افتد. برای تشخیص آن باین طریق عمل می کنیم :

فرض میکنیم A سایه 'aa بر صفحه افق و B سایه "aa بر صفحه قائم واقع شود، B سایه 'aa را بفرض اینکه صفحه قائم نباشد بر افق تعیین میکنیم. A و B، خط الارض را در α قطع میکند، Aα قسمتی از سایه یال BA واقع بر صفحه افق و Bα قسمتی از آن واقع بر صفحه قائم است (ش ۵۰)

ش ۵۰

مکانیک

I — بردارها — عزم

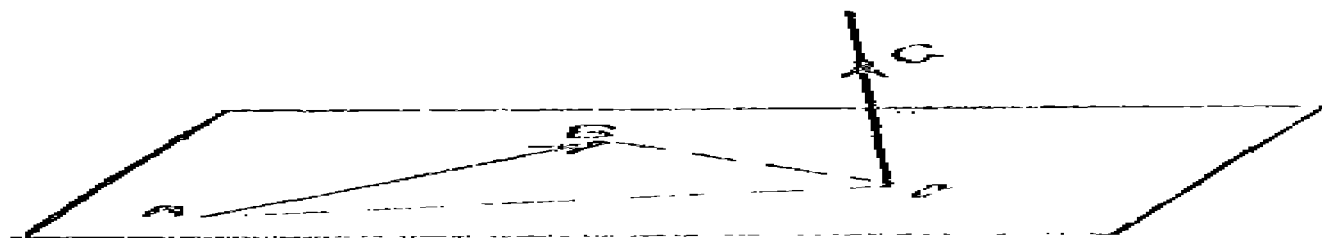
۱ — بردارها بصفحه ۹۳ شمارههای ۱۳۶ تا ۱۴۴ مراجعه شود.

۲ — جهت دوران - اگر شخصی درامتداد محوری بطوری قرار گیرد که سرش بطرف مثبت محور متوجه باشد برای او جهت مثبت دوران جهت حرکت از چپ براست است این جهت را مستقیم و مخالف آنرا معکوس گویند.

دو بردار متعامد نسبت بهم مستقیمند موقعی که اگر شخصی درامتداد یکی از آنها قرار گیرد بطوریکه سرش بطرف انتهای بردار متوجه باشد و بردار دیگر را نگاه کند جهت بردار دوم نسبت باو ازچپ براست باشد. در غیر این حال دو بردار نسبت بیکدیگر معکوسند.

۳ — عزم مرکزی — عزم بردار (اب) نسبت بنقطه (و)

M_o (اب) = (وج)

بردار دیگری است مانند (وج) (ش ۱) که:

۱) مبدأ آن نقطه O میباشد .

۲) محملش عمودی است که از نقطه O بر صفحه OAB اخراج شود .

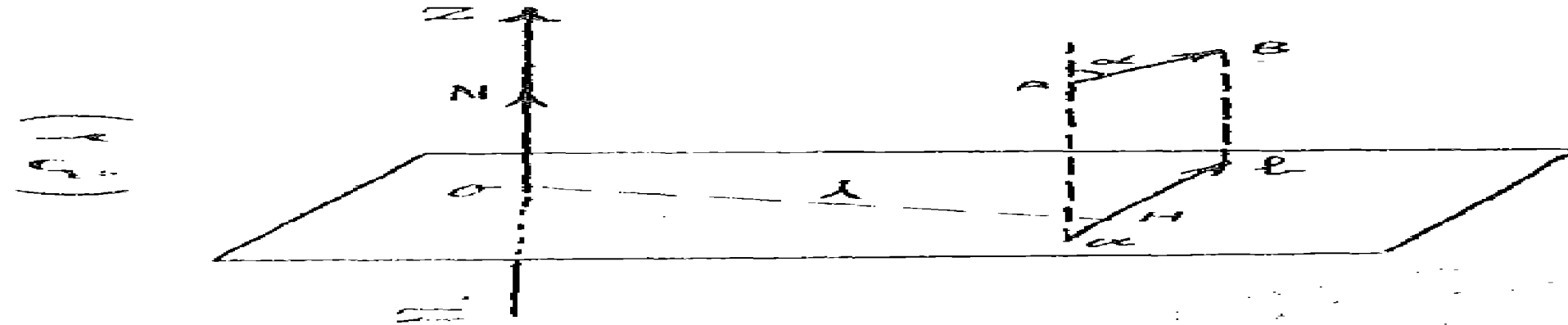
۳) جهتش نسبت بردار AB مستقیم است .

٤) طولش بحسب عدد دو برابر مساحت مثلث OAB است

٤ـ عزمهای دو بردار متقابل نسبت بیك نقطه دو بردار متقابلند

۵ ـ عزم یك بردار تغییر نمیکند اگر: ۱) بردار بر محملش حرکت کند ۲) مبدأ آن ثابت بوده انتهایش بر خطی موازی OA تغییر مکان دهد .

٦ـ اگر مرکز عزم بر بردار منطبق یا طول بردار صفر باشد عزم آن صفر است .

۷ - عزم محوری - عزم بردار (AB) نسبت بمحور $Z'Z$ عبارتست از عزم تصویر قائم (AB) بر صفحه‌ای که بر $Z'Z$ عمود باشد نسبت بنقطه تقاطع $Z'Z$ با آن صفحه (ش ۲) و اینطور نوشته میشود:

(ش ۲)

$$M_{zz'}(AB) = M_O(ab) = ON$$

حال اگر α و λ بترتیب زاویه بردار AB و محور وطول عمود مشترک بردار AB ومحور zz' باشند:

$$ON = AB.\lambda.\sin\alpha$$

۸ — عزم محوری یك بردار تغییر نمیکند هرگاه: ۱) بردار برمحمل خود حرکت کند ۲) سطح تصویر تغییر نماید.

۹ـ عزم محوری یك بردار صفر است وقتی: ۱) طول بردار صفر باشد ۲) بردار و محور در یك صفحه باشند.

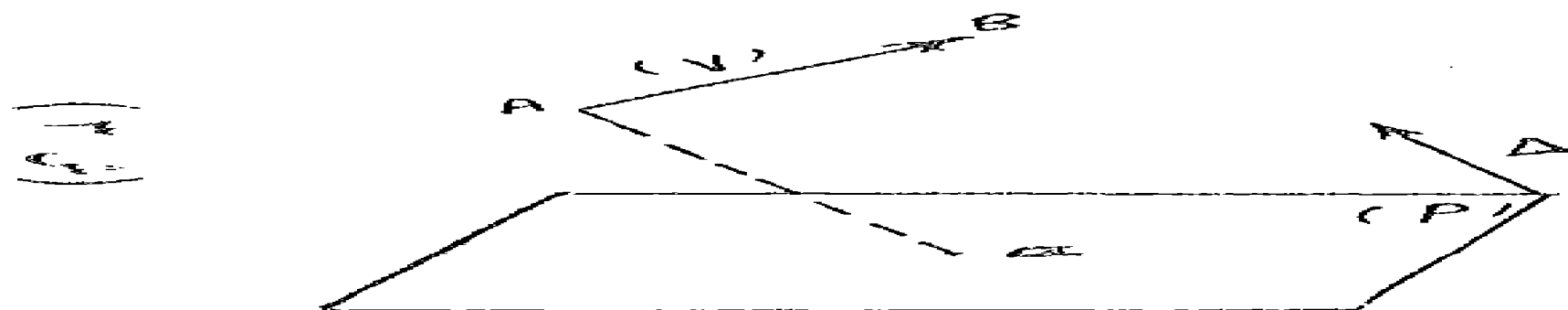
۱۰ — قضیه – تصویر قائم عزم مرکزی یك بردار بر محوری که برمرکزعزم بگذرد مساوی عزم بردارمفروض نسبت باین محور است.

۱۱ — قضیه واری یون (Varignon) — عزم برآیند یکدسته بردار متقارب مساوی برآیند عزمهای بردارهای مفروض است.

۱۲ — تعریف — برآیند عزمهای دو بردار زوج نسبت بیك نقطه را محور زوج مفروض گویند.

۱۳ — قضیه — محور یك زوج برداری است ثابت.

۱۴ - عزم بردار نسبت بصفحه- هرگاه صفحه P و امتداد $\triangle$ داده شده باشند عزم هر بردار (V) نسبت بصفحه P عبارتست از حاصلضرب مقدار جبری بردار (V) در مقدار جبری فاصله نقطه اثر آن از صفحه وقتی که فاصله اخیر بموازات امتداد $\triangle$ اندازه گرفته شده باشد (ش ۳)

$$M_P(V) = (V) \cdot \Delta\alpha$$

اندازه جبری فواصل نقاط اثر در بالای صفحه مثبت و در زیر آن منفی هستند .

اگر بردار درحول نقطه اثر خود دوران کند درعزم آن نسبت بصفحه P تغییری حاصل نمی شود ، اما اگر بسر محمل خود حرکت نماید عزم آن تغییر میکند .

علم الحرکات (Cinematique)

I – تعاریف

۱ — سکون و حرکت — وقتی فاصله نقطه M از نقاط مختلف جسم صلب S تغییر نکند M نسبت بآن جسم ساکن والا متحرك است .

۲ — موضوع علم الحرکات بحث در حرکت است بدون توجه بعلل پیدایش آن .

۳ — معادله زمانی متحرك – رابطه $S = f(t)$ را

معادله زمانی متحرک گویند (s: مسافت مطویه و t: زمان حرکت است)

۴ — مسیر حرکت — راهی را که نقطه متحرک در فضا طی میکند مسیر متحرک نامند. برحسب آنکه مسیر مستقیم یا منحنی باشد حرکت ، مستقیم الخط یا منحنی الخط است .

II - حرکت مستقیم الخط متشابه

۵ — **تعریف** — هرگاه متحرکی برمسیر مستقیمی تغییر مکان دهد و در یك جهت مسافاتی متناسب با زمان بپیماید حرکتش مستقیم الخط متشابه است .

۶ — **معادله حرکت** — هرگاه s: مسافت مطویه t: زمان ، s_0: مسافت اولیه (فاصله از مبداء حرکت در لحظه $t = 0$) و v: سرعت حرکت باشد :

$$s = vt + s_0$$

۷ — **بردار سرعت** — محملش مسیر حرکت ، مبدءاش نقطه متحرك ، جهتش برحسب آنکه سرعت مثبت یا منفی باشد درجهت حرکت یا مخالف آنست . قدرمطلق آن مسافتی است که متحرک در واحد زمان میپیماید .

۸ — **قضیه** — هر حرکت مستقیم الخطی که معادلهاش از درجه اول باشد متشابه است .

III - حرکت مستقیم الخط متغیر

۹ — **تعریف** — وقتی متحرك برمسیر مستقیمی درزمانهای

متساوی مسافات غیر مساوی طی کند حرکتش مستقیم الخط متغیر است .

۱۰ — **معادله حرکت** از درجه اول برحسب t و عبارتست از : $s = f(t)$

۱۱ — **حامل سرعت** — بر مسیر واقع است و مبدءاش نقطه متحرك وجهتش اگر مثبت باشد درجهت مسیر والا بر خلاف آنست . قدر مطلق آن مشتق s یعنی $f'(t) = v$ میباشد .

۱۲ — **حامل شتاب** بر مسیر واقع و قدر مطلقش مشتق ثانی s یعنی $f''(t) = \gamma$ میباشد ، جهتش در صورتیکه تابع v صعودی باشد درجهت مثبت مسیر والا برخلاف آن است .

۱۳ — حرکت را **مسرعه** گویند اگر سرعت از حیث قدر مطلق ترقی کند والا **مبطئه** نامند .

۱٤ — **دیاگرام حرکت** سه منحنی نمایش تغییرات توابع s و v و γ را که نسبت بدو محور Ot و Os رسم شوند دیاگرام حرکت نامند .

IV — **حرکت متشابه التغییر**

۱۵ — **تعریف** — وقتی سرعت تابع درجه اولی نسبت بزمان باشد حرکت مستقیم الخط متشابه التغییر است .

۱ — معادله حرکت

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + s_0$$

۲ — سرعت : $v = \gamma t + v_0$

۳ — شتاب : مقدار ثابت $= \gamma$

اگر $\gamma < 0$ باشد حرکت مسرعه و اگر $\gamma > 0$ باشد مبطئه است.

۴ — مقدار سرعت برحسب مسافت:

$$v^2 = 2\gamma(s - s_0) + v_0^2$$

V — حرکات نوسانی ساده

۱۶ — تعریف — اگر متحرک M برمحیط دائره‌ای بشعاع R حرکت متشابه داشته باشد تصویرش برخطی که در صفحه همین دایره واقع باشد دارای حرکت نوسانی ساده خواهد بود.

۱ — حرکت نوسانی ساده حرکت مستقیم الخطی است متناوب و بمعادله:

$$x = R\cos(\omega t + \alpha)$$

۲ — دوره تناوب: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ؛ تواتر: $n = \frac{1}{T}$

۳ — سرعت: $v = -R\omega\sin(\omega t + \alpha)$

۴ — شتاب: $\gamma = -R\omega^2\cos(\omega t + \alpha) = -x\omega^2$

۵ — پس از حذف t درروابط فوق:

$$v = \pm\omega\sqrt{R^2 - x^2} \qquad \gamma = \pm\omega\sqrt{R^2\omega^2 - \omega^2}$$

VI — حرکات منحنی الخط متشابه

۱۷ — قضیه — تصاویر حاملهای سرعت وشتاب حرکت هر متحرک M برهر محور سرعت وشتاب حرکت تصویر متحرک M است بر آن محور.

۱۸ — مشخصات حرکت

اگر s مسافت طی شده در روی منحنی ، t زمان ، x ، y ، z ، مختصات متحرك ، v سرعت ، v_x و v_y ، v_z تصاویر سرعت برمحورها، γ شتاب ، γ_x و γ_y و γ_z تصاویر شتاب بر محورها باشند :

۱ — معادله زمانی حرکت :

$$s = f(t) \qquad v = f'(t) \qquad \gamma = f''(t)$$

۲ — مختصات زمانی متحرك

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

$$v_x = f'(t) \qquad v_y = g'(t) \qquad v_z = h'(t)$$

$$v = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}$$

$$\gamma_x = f''(t) \qquad \gamma_y = g''(t) \qquad \gamma_z = h''(t)$$

$$\gamma = \sqrt{b''(t)^2 + g''(t)^3 + h''(t)^2}$$

۱۹ — هدگراف — اگر از نقطه A درهر لحظه برداری همسنك سرعت رسم کنیم انتهای این بردارمنحنی‌ای می‌پیماید که هدگراف نام دارد ، پس هدگراف مکان‌هندسی انتهای بردارهائی همسنك سرعت است که از یك مبداء رسم شده باشند .

VII . حرکت مستدیر متغیر

۲۰ — تعریف — وقتی مسیر متحرك دایره یا قوسی از آن

باشد حرکت را مستدیر گویند .

۱ ـ **معادلهٔ حرکت** ـ اگر θ اندازهٔ زاویه مرکزی AOM برحسب رادیان و A مبداء قوس s و O مرکز و R شعاع دایره و M متحرک مفروض و s_0 مسافت اولیه باشد :

$$\theta = f(t) \quad \text{و} \quad s = R\theta + s_0$$

۲ ـ مختصات نقطهٔ M نسبت بمحور OA ومحور عمود بر آن :

$$y = R\sin\theta \quad \text{و} \quad x = R\cos\theta$$

۳ ـــ سرعت زاویه‌ای $\omega = f'(t)$

٤ ـــ حامل سرعت مماس بر دایره مسیر و اندازهٔ آن $v = R\omega$ یا $v = s' = R\theta'$ است

۵ ـ شتاب زاویه‌ای متحرک عبارتست از $\dfrac{d\omega}{dt}$ و

شتاب منتجه عبارت خواهد بود از $\gamma = R\sqrt{\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2 + \omega^4}$

VIII ـ حرکت مستدیر متشابه

۱ ـ معادله حرکت $s = R\omega t + s_0$

۲ ـ سرعت خطی آن $v = \dfrac{ds}{dt} = R\omega$

۳ ـ شتاب $\gamma = R\omega^2$

IX ـ تغییر دستگاه مقایسه

۱ ۲ ـــ تعریف ـ مقصود از تغییر دستگاه مقایسه حل این مسئلهٔ کلی است :

۳۲ — مسئله — سه جسم صلب A و B و C مفروضند حرکت B نسبت به A و همچنین حرکت C نسبت به B معلوم است، حرکت C به A را تعیین کنید.

A را دستگاه ثابت و B را دستگاه نسبی مقایسه و حرکتش را نسبت به A کششی و حرکت C را نسبت به B حرکت نسبی و نسبت به A حرکت منتجه مینامند.

۳۳ — قضیه — منتجه سرعت حرکت هر نقطه در هر لحظه مجموع هندسی دو سرعت کششی و نسبی آن خواهد بود.

۳۴ — قضیه — هرگاه حرکت کششی انتقالی باشد شتاب منتجه مساوی منتجه شتابهای کششی و نسبی است.

X— حرکت انتقالی

۳۵ — تعریف — جسم M نسبت بدستگاه ثابت A دارای حرکت انتقالی است هرگاه هر خط غیر مشخص از جسم M موازی خط ثابتی از دستگاه A باشد، لذا شرط لازم و کافی برای اینکه جسمی دارای حرکت انتقالی باشد اینست که همیشه دو خط متقاطع آن موازی دو خط ثابت از دستگاه مقایسه باشند.

۳۶ — قضیه — وقتی جسمی حرکت انتقالی کند ۱) مسیر تمام نقاطش قابل انطباقند ۲) در هر لحظه سرعت های جسم نقاطش بردارهای همسنگند ۳) بردارهای شتاب در هر لحظه همسنگند.

XI — دوران

۳۷ — تعریف — هرگاه دو نقطه از جسمی ضمن حرکت نسبت بیکدستگاه مقایسه ثابت بمانند آن جسم حول خط واصل بین آن دو نقطه دوران میکند و آن خط را محور دوران گویند. مسیر هر یك از نقاط جسم ضمن دوران دایره ایست عمود بر محور دوران — حامل دوران محملش محور دوران و جهتش نسبت بجهت دوران نقاط مثبت و کمیتش مساوی اندازه عددی سرعت زاویه ای یك نقطه جسم در لحظه معین است. سرعت هر نقطه از جسم ضمن دوران در هر لحظه مساوی عزم حامل دوران در آن لحظه نسبت بآن نقطه میباشد.

علم القوی (Dynamique)

تعاریف :

۳۸ — علم القوی یا دینامیك در حرکات و علل موجده آنها بحث میکند.

۳۹ — چون تعادل اجسام حالت خاصی از حرکت است علم تعادل قوی یا استاتیك (Statique) حالت مخصوصی از دینامیك میباشد.

۴۰ — اصل جبر (کپلر) (Principe de l'inertie) — نقطه مادی بخودی خود از سکون بحرکت یا از حرکت بسکون در نمیآید.

۴۱ — نتیجه — ۱) اگر نقطه مادی ساکن باشد و

عاملی بر آن اثر نکند همواره ساکن میماند .

۲) اگر نقطه مادی متحرک باشد و عاملی بر آن اثر نکند همواره متحرک بوده حرکتش مستقیم الخط متشابه است.

۳) تغییر وضع نقطه مادی از حرکت بسکون یا بالعکس در اثر عاملی است که **قوه** نامیده میشود .

۳۲ — اثر قوه بر نقطه مادی تولید شتاب در آن میباشد .

۳۳ — همواره بین قوه وارد بر نقطه مادی و شتاب نظیر آن نسبت ثابت $m = \frac{F}{\gamma}$ بر قرار است مقدار این نسبت ثابت m را جرم نقطه مفروض مینامند .

۳۴ — رابطه $m = \frac{F}{\gamma}$ را **رابطه اصلی مکانیک** نام دارد.

۳۵ — جسمی که در خلاء رها شود بطور قائم بسمت زمین فرود میآید و حرکتش متشابه التغییر است . قوه‌ای که باعث این شتاب ثابت میشود وزن جسم است، پس بین P وزن جسم و m جرم آن و g شتاب ثقل این رابطه برقرار است :

$$P = mg$$

۳۶ — بین P و P' وزنهای دو جسم و m و m' جرم‌های آنها در هر نقطه از زمین این رابطه برقرار است :

$$\frac{P}{P'} = \frac{m}{m'}$$

۳۷ — اصل استقلال آثار قوا (گالیله) — اثر چند قوه که با هم بر یک نقطه مادی وارد شوند نظیر همان اثر بست که مجموع هندسی آنها در آن نقطه تولید کند .

۳۸ – اصل تساوی عمل و عکس العمل (نیوتن)
هر عملی عکس العملی مساوی و در جهت مخالف با خود ایجاد میکند.

XIII – تعادل نقطه مادی

۳۹ — نقطه مادی در حال تعادل است وقتی که تحت تأثیر هیچ قوه ای نباشد، یا قوائی که بر آن وارد میشوند نشانی در آن ایجاد ننمایند. در این حال اگر نقطه سرعتی داشته باشد مطابق اصل کپلر حرکت آن همیشه مستقیم الخط متشابه است و تعادل چنین نقطه ای را **تعادل دینامیکی** مینامند؛ ولی هرگاه نقطه در لحظه معینی ساکن باشد همیشه ساکن خواهد بود و تعادلش **تعادل استاتیکی** است.

۴۰ — نقطه را **آزاد** گویند وقتیکه بتواند در اثر قوای وارده در جهات مختلف حرکت کند در غیر اینصورت نقطه **غیر آزاد** است.

۴۱ — نقطه غیر آزاد تحت تأثیر دو نوع قوه است:

۱ – **قوای مستقیم** (مانند وزن نقطه)

۲ – **قوای وابسته** که بوسیله موانع ایجاد میشوند.

XIV – استاتیک نقطه آزاد

۴۲ – **قضیه** – شرط لازم و کافی برای تعادل نقطه مادی آزادی که تحت تأثیر چند قوه واقع شود اینست که منتجه این قوا صفر باشد. شرط فوق بطریق تحلیلی اینطور بیان میکرد:

اگر (X_1 و X_2 و ... X_n) و (Y_1 و Y_2 و ... Y_n)

و (Z_1 و Z_2 ... و Z_n) تصاویر قوا و X و Y و Z تصاویر R منتجهٔ آنها بر سه محور مختصات متعامد باشند شرط تعادل اینست که ۰ = R یعنی :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0$$

۴۳ ــ رابطهٔ استوِن (Stévin) ــ برای اینکه نقطهٔ مادی در تحت تأثیر سه قوه بحال تعادل باشد لازم و کافی است که :

۱ ــ هر سه قوه در یك صفحه باشند.

۲ ــ هر کدام خارج زاویهٔ دو قوهٔ دیگر قرار گیرد.

۳ ــ مقدار هر یك متناسب با جیب زاویه بین دو قوهٔ دیگر باشد یعنی :

$$\frac{F_1}{\sin(F_2 \text{ و } F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_3 \text{ و } F_1)} = \frac{F_3}{\sin(F_1 \text{ و } F_2)}$$

XVII ــ تعادل نقطهٔ غیر آزاد

۴۴ ــ هرگاه نقطه‌ای در تحت تأثیر قوای چندی که برآیند آنها R باشد بر یك سطح یا یك منحنی تغییر مکان دهد ممکن است : ۱) فقط بتواند بر سطح یا منحنی تغییر مکان دهد ولی از آن نتواند جدا شود ؛

۲) بر سطح متکی باشد ، یعنی بتواند از یکجهت از سطح جدا شود ؛ در اینصورت اثر R فقط آنستکه نقطه‌را بر روی سطح نگاهمیدارد .

۴۵ — **فشار و عکس العمل** — نقطه غیر آزاد M در تحت تاثیر R برآیند قوای وارد برآن ، بر سطح یا منحنی عملی مساوی R بنام **فشار** وارد میآورد وسطح یا منحنی در مقابل بر نقطه M فشارمتقابلی مانند R' موسوم به **عکس‌العمل** وارد میسازد . **عکس العمل قوه ایست وابسته** . R' مساوی R ودرجهت مخالف آنست .

۴۶ — **اصطکاك** — ۱) ممکنست سطح یا منحنی کاملا صیقلی (بی اصطکاك) باشد . R' و R بر آن عمودند .

۲) و نیز ممکنست خشن (بااصطکاك باشند) ، در اینصورت R' و R باآن زاویه ای میسازند ، مقدار این زاویه بستگی با درجه خشونت (اصطکاك) جسم دارد . θ زاویه R' و R با سطح یا منحنی را **زاویه اصطکاك** و $\operatorname{tg}\theta$ را **ضریب اصطکاك** میگویند .

۴۷ – مخروطی که رأسش نقطه مادی واقع بر سطح و محورش عمود بر سطح وزاویهٔ رأسش دو برابر زاویه اصطکاك باشد به **مخروط اصطکاك** معروف است .

۴۸ — **قضیه** – شرط لازم و کافی برای اینکه نقطه‌مادی واقع بر سطح یا منحنی بی اصطکاك بحال تعادل باشد آنست که R، منتجهٔ قوای وارده بر سطح یا منحنی عمود بوده و نقطه را بر آن بچسباند .

۴۹ — **قضیه** — شرط تعادل نقطه مادی واقع بر سطح یا منحنی با اصطکاک آنست که زاویه بین R برآیند قوا و قائم بر نقطه از زاویه اصطکاک کوچکتر باشد یا بعبارت دیگر منتجه قوا داخل مخروط اصطکاک و یا منطبق بر سطح آن باشد.

۵۰ — **قوانین اصطکاک** (Coulomb) :

۱ — قوه اصطکاک حد با فشار قائم متناسب است.

۲ — قوه اصطکاک بوسعت سطح اتکا بستگی ندارد.

۳ — قوه اصطکاک بجنس سطح و میزان صیقلی بودن آن و ماده‌ای که سطح را با آن اندوده باشند بستگی دارد.

XV - دینامیک نقطه

۵۱ — موضوع دینامیک تعیین روابط بین قوه و شتاب و سرعت و کار است.

۵۲ — اثر قوه تولید شتاب است در متحرک. شتاب باعث تغییر سرعت است.

۵۳ — **دستورهای اصلی دینامیک** — اگر X و Y و Z تصاویر قوه F بر سه محور و $\frac{d^2X}{dt^2}$ و $\frac{d^2Y}{dt^2}$ و $\frac{d^2Z}{dt^2}$ تصاویر شتاب بر آنها باشند.

$$F = m\gamma ; \quad X = m\frac{d^2x}{dt^2} ; \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2} ; \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

بکمک دستورهای اصلی دینامیک میتوان این دو مسئله را حل کرد :

۱) تعیین حرکتی که نقطه‌ای بجرم m تحت تأثیر قوه F انجام میدهد.

۲) تعیین قوه‌ای که موجب حرکت معینی برای نقطه‌ای بجرم m میشود.

XVII ـ حرکت نقطه مادی آزاد

۵٤ ــ اولا حرکت در امتداد قائم ــ ۱ ـ اگر جسمی بجرم m از مبداء (واقع بر امتداد قائم) با سرعت اولیه v_0 در خلاء رها شده باشد تنها قوه‌ای که بر آن وارد میشود وزن آن یعنی mg است و مسیر حرکت همان امتداد قائم خواهد بود.

۲ ــ قوانین حرکت ـ اگر جهت از پائین ببالا مثبت فرض شود:

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$v = gt + v_0$$

$$\gamma = g$$

۳ ـ اگر $v_0 = 0$ باشد حرکت از بالا بپائین و معکوس و مسرعه است.

٤ ـ اگر $v_0 < 0$ باشد حرکت از پائین ببالا و در فاصله زمانی $t = \frac{v_0}{g}$ مستقیم و مبطئه است و متحرك بازاء $t = \frac{v_0}{g}$ در فاصله $x = \frac{v_0^2}{2g}$ به اوج میرسد و پس از آن حرکت معکوس و مسرعه میشود.

۵ ـ در هر نقطه از مسیر متحرك دارای دو سرعت قرینه

$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gz}$ میباشد که یکی سرعت صعود و دیگری سرعت نزول است.

۶ - زمان صعود تا هر نقطه از مسیر مساوی زمان برگشت از آن نقطه بمحل اولیه میباشد.

۵۵ - ثانیاً حرکت سهمی شکل

۱ - اگر جسمی بجرم m در مبداء زمان ($t=0$) از مبداء O با سرعت اولیه V_0 در امتدادیکه با افق زاویه $\alpha < 90°$ دارد در خلاء پرتاب شده باشد تنها قوه‌ایکه بر آن وارد میشود وزن آن خواهد بود و مسیر حرکت منحنی مسطحی است که در صفحه قائم zOx قرار دارد.

۲ - قوانین حرکت

در امتداد Oz (خوانش تقریبی برچسب عمودی)

$$\begin{cases} \gamma_z = \dfrac{d^2 z}{dt^2} = -g \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \\ z = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t \end{cases}$$

در امتداد Ox (خوانش تقریبی برچسب عمودی)

$$\begin{cases} \gamma_x = \dfrac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \\ x = v_0 \cos\alpha \cdot t \end{cases}$$

۳ - معادلهٔ سهمی مسیر

$$z = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

۴ — ارتفاع نقطه اوج و زمان رسیدن به آن:

$$z_1 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad \text{و} \quad t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

۵ — برد یا میدان حرکت: $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

۶ — هدوگراف (بمبداء O)

خط $x = v_0 \cos\alpha$ (موازی Oz)

۷ — دو فاصله $\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ تا حرکت مبطئه، در آن لحظه سرعت می نیمم و مساوی $v_0 \cos\alpha$ و پس از آن حرکت متسرعه میباشد.

۸ — در هر نقطه بارتفاع z: $v = \sqrt{v_0^2 - 2gz}$

۹ — پارامتر سهمی $\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$ و فاصله هادی از مبداء $\frac{v_0^2}{2g}$ است

۱۰ — معادله سهمی اطمینان:

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2}$$

XVIII — حرکت نقطه مادی غیر آزاد

۵۶ — حرکت بی اصطکاک — نقطه M روی یک منحنی صیقلی تحت تأثیر قوهٔ R و عکس العمل R' تغییر مکان میدهد: تصویر R بر قائم بر صفحه در امتداد R' است و خنثی میشود و فقط تصویر R بر مماس بر سطح است که M را بحرکت در میآورد.

اگر تصویر R بر مماس را R_t بنامیم : بموجب رابطهٔ $F = m\gamma$:

$$R_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

این رابطه را معادلهٔ اصلی Intrinsèque حرکت میگویند .

۵۷ــ حرکت با اصطکاك ــ دراین صورت عکس العمل R' با سطح زاویه θ (زاویه اصطکاك) میسازد وقوای مؤثر بر نقطه عبارتست از برآیند تصاویر R و R' بر مماس بر سطح . پس :

$$R_t + R'_t = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

۵۸ ــ مثال : حرکت نقطه بر سطح مورب ــ اگر زاویه سطح مورب را با افق α و سرعت اولیه حرکت را v_0 بنامیم :

۱) **بی اصطکاك :** اگر $v_0 = 0$ باشد

$$\gamma = g\sin\alpha \;;\; v = g\sin\alpha t \;;\; x = \frac{1}{2} g\sin\alpha \, t^2$$

هرگاه v_0 صفر نباشد

$$\gamma = g\sin\alpha \;;\; v = g\sin\alpha t + v_0$$

$$x = \frac{1}{2} g\sin\alpha t^2 + v_0 t$$

هرگاه $v_0 < 0$ باشد(طرف بالا منفی فرض میشود)حرکت تازمان $t = \frac{v_0}{g\sin\alpha}$ مبطئه (رو ببالا) و از آن پس مسرعه (رو

پائین) خواهد بود .

۲ ــ با اصطکاک

زاویه اصطکاک را ضمن حرکت θ فرض میکنیم نقطه M تحت تأثیر وزن خود (mg) وعکس العمل R میباشد :

۱) حرکت بطرف پائین : $v_0 \geq 0$ ــ قوانین حرکت عبارتند از :

$$v = g\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\cos\theta}t + v_0 \quad , \quad v^2 = 2g\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\cos\theta}x + v_0^2$$

$$x = \frac{1}{2}g\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\cos\theta}t^2 + v_0 t$$

موقعیکه $\theta > \alpha$ میباشد اگر $v_0 = 0$ باشد نقطه بحال تعادل خواهد ماند و اگر $v_0 \neq 0$ باشد تا زمان $\frac{v_0\cos\theta}{g\sin(\theta-\alpha)}$ حرکت مستقیم مبطئه و از این بعد متحرک در فاصله $\frac{v_0^2\cos\theta}{2g\sin(\theta-\alpha)}$ بحال تعادل خواهد ماند .

موقعیکه $\theta = \alpha$ میباشد اگر $v_0 = 0$ باشد نقطه بحال تعادل خواهد ماند و اگر $v_0 \neq 0$ باشد حرکت متشابه میشود .

موقعیکه $\theta < \alpha$ باشد حرکت متشابه التغییر مسرعه است .

۲) حرکت بطرف بالا : $v_0 < 0$ ــ قوانین حرکت عبارتند از :

$v = v_0 - g\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos\theta}t$ و $x = v_0 t - \frac{1}{2} g \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos\theta} t^2$

تا زمان $t = \frac{v_0 \cos\theta}{g\sin(\alpha+\theta)}$ حرکت معکوس و مبطئ و در این زمان متحرك بفاصله $x = \frac{v_0^2 \cos\theta}{2g\sin(\alpha+\theta)}$ قرار داشته و از این بعد حرکت وضع حالت اول (شماره ۴۹-۱) را بخود میگیرد

XIX — کار

۵۹ — اگر نقطه مادی M در اثر نیروی F و در امتداد F تغییر مکانی مساوی (MM') دهد کاری مساوی $(F)(MM') = T$ انجام شده است.

۶۰ — هرگاه α زاویهٔ بین حامل F و امتداد (MM') باشد کار عبارت خواهد بود از: $T = F \cdot (MM') \cos(F, MM')$

این کار مثبت است هرگاه $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ باشد و آنرا کار محرکه نامند و منفی است وقتی که $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ باشد و آنرا کار مقاوم نامند؛ اگر $\alpha = \frac{\pi}{2}$ یا $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ باشد کار صفر است.

XX — قوه حیه (Force vive)

۶۱ — تعریف — فرس و یا قوه حیه یك نقطه مادی بجرم

m که با سرعت v حرکت کند عبارتست از mv^2

۶۲ — نصف فرس و یو ($\frac{1}{2} mv^2$) را انرژی حرکتی énergie cinétique نقطه گویند.

۶۳ — قضیه — تغییرات انرژی حرکتی یك نقطه مادی متحرك بین دو نقطه m_1 و m_2 مساویست با حاصل جمع کارهای قوای وارد بر نقطه بین این دو لحظه.

XXI — استاتیك جسم صلب

۶۴ — قوای وارد بر جسم صلب عبارتند از: ۱) قوای خارجی ۲) قوای درونی.

۱) قوای خارجی از نقاط مادی خارج از جسم ناشی میشوند و خود بدو قسمت میشوند: ۱) قوای مستقیم ۲) قوای ارتباطی خارجی.

۲) قوای درونی از اعمال متقابل نقاط خود جسم ناشی میگردند و عبارتند از عکس العمل های ملکولی و قوای ارتباطی داخلی.

۶۵ — جسم صلب را در حال تعادل **استاتیکی** گویند وقتیکه اگر آنرا بدون سرعت اولیه بحال خود گذارند در اثر قوای وارد بر آن نسبت بدستگاه مقایسه بیحرکت بماند.

۶۶ — شرط لازم برای اینکه جسمی درحال تعادل باشد آنست که $(\vec{R})$ مجموع هندسی قوای خارجی وارد بر آن و $(\vec{M}(O))$ منتجه عزم این قوا صفر باشد یعنی: $(\vec{R}) = 0$ و $(\vec{M}(O)) = 0$.

۶۷ ـ **تعادل دستگاهها** ـ دو دستگاه قوا متعادلند وقتیکه اثر آنها در یک جسم یکسان باشد .

۶۸ ـ **قضیه**ـ شرط لازم برای تعادل دو دستگاه قوا آنست که مجموع هندسی آنها باهم و منتجهٔ عزمشان نسبت بنقطه غیر مشخصی باهم مساوی باشند یعنی $(OR') = (OR)$ و $(O)(i') = (O)(i)$. این شرایط برای اجسامیکه تغییر شکل نمیدهند لازم و کافی است .

XXII ـ اعمال مقدماتی

همیشه میتوان بوسیله اعمالی بنام اعمال مقدماتی دستگاه قوائیرا بدستگاهی دیگر معادل با آن تبدیل نمود . این اعمال عبارتند از :

۱ ـ لغزاندن قوه بر محمل آن .

۲ ـ تبدیل چند قوه متقارب بمجموع هندسی آنها و بعکس تجزیه یک قوه بمؤلفه‌های خود .

۳ ـ اضافه یا کسر نمودن دو قوه متقابل .

۶۹ ـ بوسیله اعمال مقدماتی دستگاه قوای وارد بر جسم را بدستگاهی معادل با آن که مؤلفات کمتری داشته باشد تبدیل میکنند و از این راه حالت و وضع حرکت جسم را تعیین مینمایند .

۷۰ ـ **مختصات مرکز قوای موازی** ـ اگر بچند نقطه مادی A_1 و A_2 و ... و A_n از یک جسم بترتیب قوای موازی

یکدیگر با مقادیر جبری F_1 و F_2 و . . . و F_n وارد شوند و مختصات نقاط مذکور نسبت به سه محور متعامد $A_1(x_1, y_1, z_1)$ و $A_2(x_2, y_2, z_2)$ و . . . و $A_n(x_n, y_n, z_n)$ ومختصات مرکز این قوا x و y و z باشند:

$$x = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + \cdots + x_n F_n}{F_1 + F_2 + \cdots + F_n} = \frac{\Sigma F_n x_n}{\Sigma F_n}$$

$$y = \frac{\Sigma y_n F_n}{\Sigma F_n} \quad \text{و}$$

$$z = \frac{\Sigma z_n F_n}{\Sigma F_n}$$

وقتی قوای مزبور با یکدیگر مساوی باشند مختصات مرکز آنها چنین میشود:

$$x = \frac{\Sigma x_n}{n} \quad \text{و} \quad y = \frac{\Sigma y_n}{n} \quad \text{و} \quad z = \frac{\Sigma z_n}{n}$$

۷۱ - قضیه - همیشه ممکن است قوای وارد بر جسمی را بسه قوه که نقاط اثرشان سه نقطه دلخواه واقع بر یک استقامت باشند تبدیل نمود.

۷۲ - قضیه - ممکن است قوای وارد برجسمی را بسه قوه که یکی از آنها بر نقطه اختیاری معینی وارد شود تبدیل نمود.

XXIII - مرکز ثقل

۷۳ - تعریف - اوزان نقاط مادی یک جسم قوای

متوازی قائمی هستند که مرکز آنها مرکز ثقل جسم (ن) است و منتجه آنها برداریست قائم که بر نقطه G میگذرد .

۷۴ - مختصات مرکز ثقل - اگر m_1 و m_2 و ... و m_n بترتیب جرمهای نقاط مادی A_1 و A_2 و ... و A_n جسمی باشند و هر یک از نقاط فقط تحت تأثیر قوای حاصل از وزن خود قرار گیرند مختصات مرکز ثقل جسم مزبور نسبت به محور متعامد عبارتند از :

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

۷۵ - اجسامی که شکل آنها ثابت است اگر هم محلشان تغییر کنند یا از وضع اولیه منحرف شوند مرکز ثقلشان تغییر نمیکند .

۷۶ - جسمی را متشابه الاجزاء گویند اگر هر دو جزء متساوی الحجم از آن متساوی الجرم باشند .

۷۷ - قضیه - شکلی که دارای مرکز یا محور یا (سطح تقارن است مرکز ثقلش بر این مرکز یا محور یا سطح تقارن قرار دارد .

۷۸ - یک شکل مستوی (یا یک جسم) دارای یک قطر یا یک صفحه قطری) وابسته بامتداد Δ است وقتی که جمیع نقاط

آن شکل مستوی (یا جسم) را بتوان بدو دسته چنان تقسیم نمود که خط واصل بین هر نقطه یکدسته و نقطه نظیرش در دسته دیگر موازی امتداد Δ بوده و وسطش بر آن قطر (یا صفحه قطری) واقع گردد.

۷۹- قضیه- شکلی که دارای قطر یا صفحه قطری نظیر امتداد معینی باشد (۷۸) مرکز ثقلش بر این قطر یا صفحه قطری قرار دارد.

۸۰- مرکز ثقل قطعه خط مستقیم - نقطه وسط آن است.

۸۱- مرکز ثقل محیط مثلث - مرکز دائره محاطی مثلثی است که از وصل مواقع میانه‌های آن بدست میآید

۸۲- مرکز ثقل سطح مثلث - نقطه تلاقی سه میانه آن است.

۸۳- مرکز ثقل چهارضلعی - نقطه تلاقی دو خط واصل بین مراکز ثقل چهار مثلثی است که بترتیب از دو ضلع متقاطع چهارضلعی و یک قطر تشکیل میشود.

۸۴- مرکز ثقل ذوزنقه‌ای بقواعد B و b و مرکز ثقل G) بفرض اینکه I و I' مواقع عمودهای مرسوم از G بر دو قاعده باشند از این رابطه بدست میآید:

$$\frac{GI}{GI'} = \frac{B + 2b}{2B + b}$$

۸۵- مرکز ثقل متوازی الاضلاع - محل تلاقی دو قطر آنست.

۸۶ — مرکز ثقل کثیر الاضلاع منتظم — مرکز آن است.

۸۷ — مرکز ثقل دایره — مرکز دایره است.

۸۸ — مرکز ثقل منکسر منتظم بطول l و شعاع دایره محیطی R و وتر منتجهٔ C از این رابطه بدست میآید:

$$OG = \frac{R \cdot C}{l}$$

۸۹ — مرکز ثقل قوس دایره مقابل بوتر AB از دایره‌ای بمرکز O و بشعاع R از این رابطه بدست میآید:

$$GO = \frac{R \cdot AB}{\text{قوس } AB}$$

۹۰ — مرکز ثقل بیضی - محل تلاقی دو قطر آنست.

۹۱ — مرکز ثقل قطاع دایره بشعاع R و مرکز O منطبق بر مرکز ثقل قوسی از دایره به شعاع $\frac{2}{3}R$ و بهمان مرکز O میباشد اگر α نصف زاویه مرکزی قطاع باشد:

$$OG = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

۹۲ — مرکز ثقل سطح نیمدایره برروی شعاع عمود بر قطر و بفاصله $OG = \frac{4R}{3\pi}$ از مرکز دایره قرار دارد.

۹۳ — مرکز ثقل متوازی السطوح نقطه تلاقی سه قطر آنست.

۹۴— **مرکز ثقل هرم ومخروط** برمرکز ثقل مقطع صفحه‌ای در آن که بفاصله $\frac{1}{4}$ ارتفاع از قاعده بموازات قاعده رسم شده باشد واقع است.

۹۵— **مرکز ثقل هرم مثلث القاعده** – روی خط واصل بین رأس ومرکز ثقل قاعده‌اش و بفاصله $\frac{3}{4}$ از رأس قرار دارد.

۹۶— **مرکز ثقل منشور و استوانه** – محل تقاطع خط واصل بین مراکز دو قاعده با مقطع متوسطش میباشد.

۹۷ – **مرکز ثقل منشور مثلث القاعده** بر وسط خط واصل بین مراکز ثقل دو قاعده‌اش قرار دارد.

۹۸— **مرکز ثقل کره** برمرکز آن منطبق است.

۹۹— **قضیه گولدن** (Guldin) – ۱) سطح حاصل از دوران یك خط مستقیم A از یك سطح معینی حول یك خط از همان سطح که A را قطع نکند مساویست با طول A ضرب در طول محیط دایرهٔ حاصل از دوران مرکز ثقل A.

۲) حجم حاصل از دوران سطح S حول خطی از همان سطح مساویست با حاصلضرب S در طول محیط دایرهٔ حاصل از دوران مرکز ثقل S.

XXIV — شرط تعادل جسم صلب آزاد

۱۰۰ – **قضیه** — شرط لازم و کافی برای آنکه آزادی صلب نسبت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که مجموع

هندسی قوای مزبور صفر و منتجه عزمهای آنها نسبت بهر نقطه صفر باشد .

۱۰۱ — بیان شرط تعادل بطریق تحلیلی — اگر منتجه تصاویر قوای وارده بر جسم روی سه محور متعامد بترتیب X و Y و Z و منتجه تصاویر منتجه عزم آنها بر سه محور ، L و M و N فرض شوند موقعی جسم بحال تعادل است که :

$$OR = 0 \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \qquad OG = 0 \begin{cases} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

XXV — شرط تعادل جسم صلب غیر آزاد

۱۰۲ — شرط لازم و کافی برای آنکه جسم صلب غیر آزاد تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد آنست که منتجه قوای مستقیم و عکس العملهای جسم از یک طرف و عزم آنها نسبت بنقطه ثابتی از طرف دیگر مساوی صفر باشد .

۱۰۳ — قضیه — شرط لازم و کافی برای آنکه جسمی که حول محوری ثابت بدون اصطکاک دوران مینماید در تحت تأثیر قوای وارده بحال تعادل باشد اینست که عزم قوای وارده نسبت باین محور صفر باشد

۱۰۴ — قضیه — شرط لازم و کافی برای تعادل جسمی که حول نقطه ثابت (۰) حرکت بدون اصطکاک دارد اینست که منتجه عزم قوای وارده نسبت باین نقطه صفر باشد .

۱۰۵ — قضیه — شرایط لازم و کافی برای تعادل جسمی که در حین دوران حول محوری بر روی آن بلغزد اینست که

مجموع تصاویر قوای وارده براین محور و همچنین عزمهای قوا نسبت بآن صفر باشد.

۱۰۶ – **کثیر الاضلاع اتکاء** – از وصل نقاط اتکاء یک جسم بر یک سطح کثیر الاضلاعی بدست میآید موسوم به کثیر الاضلاع اتکاء.

۱۰۷ – **قضیه** – شرط لازم و کافی برای تعادل جسم متکی بر سطح صیقلی آنست که منتجه قوای وارده قائم بر سطح بوده و جسم را بر سطح متکی نماید و ضمناً داخل کثیر الاضلاع اتکا باشد.

XXVI — ماشینهای ساده

۱۰۸ – **تعریف** – ماشینهای ساده دستگاههائی هستند که هر نقطه از آنها بر منحنی مشخص و ثابتی حرکت میکنند و چون ارتباطات کاملی بین اجزاء مختلفه آنها هست با مشخص بودن وضع یک نقطه بر مسیرش میتوان اوضاع سایر نقاط دستگاه را معلوم ساخت.

۱۰۹ – ماشینهای ساده واسطه بین دو نوع قوه میباشند یکی قدرت (قوای محرک) و دیگری مقاومت. دستگاه وقتی بحال تعادل است که قدرت و مقاومت دستگاهی معادل تشکیل دهند.

اهرمها

۱۱۰ — تعریف — اهرم جسمی است که حول نقطه ثابتی موسوم بنقطه اتکاء میتواند حرکت کند. طول عمودهائیکه از نقطه اتکاء بر امتداد قدرت یا مقاومت وارد شوند بازوی

قدرت یا مقاومت نام دارند.

۱۱۱ — شرط تعادل اهرم آنست که عزم قوای وارد بر آن نسبت بنقطهٔ اتکاء صفر باشد. یعنی $P.p = R.r$ (P قدرت و R مقاومت و p و r طولهای بازوی قدرت و مقاومتند) یا بعبارت دیگر قدرت و مقاومت دارای منتجه‌ای باشند که از نقطهٔ اتکاء بگذرد.

۱۱۲ — فشار بر نقطهٔ اتکاء منتجهٔ دو قوهٔ قدرت و مقاومت است یعنی:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(P, Q)}$$

پس فشار وقتی ماکزیمم است که قدرت و مقاومت موازی باشند. در اینموقع فشار مذکور $P+Q$ خواهد بود.

۱۱۳ — **انواع اهرم** — اهرم بر سه نوع است:

۱ — اهرم نوع اول که در آن نقطهٔ اتکاء بین قدرت و مقاومت واقع است. مانند ترازو و قیچی.

۲ — اهرم نوع دوم که در آن مقاومت بین قدرت و نقطهٔ اتکاء است. مانند یک چرخه (چرخ رفتگران) و تلمبه.

۳ — اهرم نوع سوم که در آن قدرت بین مقاومت و نقطهٔ اتکاء قرار دارد. مانند چرخ چاقو تیز کنی.

چرخ چاه

۱۱٤ — **تعریف** — چرخ چاه از استوانهٔ دواری تشکیل شده است موسوم به تنهٔ چرخ و در طرفین آن دو استوانهٔ کوچکتر که محورشان بر محور تنهٔ چرخ منطبق است و بر پایهٔ ثابتی

قرار دارند .

۱۱۵ — شرایط تعادل چرخ چاه آنست که اولاً قوای محرک ومقاوم چرخ را در دو جهت مخالف حرکت دهند ثانیاً مقدار آنها متناسب با نسبت عکس شعاع چرخ (یا طول دسته) و شعاع تنه باشد یعنی :

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$$

(P و Q قوای محرک ومقاوم و R و r اشعه چرخ و تنه میباشند)

۱۱۶ — انواع چرخ چاه - چرخ چاه بردو نوع است :

۱ - چرخ چاه معمولی که محور آن افقی است و چرخ محرک تبدیل بدستهٔ خمیده ای شده که متصل باستوانه میشود .

۲ — چرخ چاه معدنی که چرخ محرک آن بزرگ و بشعاع تقریباً ۵ر۳ متر است ودر کنار این چرخ نردههائی استکه اگر شخصی روی آنها حرکت کند وزن او چرخ را بحرکت درمیآورد وچرخ دوران میکند .

کریك یا جك (Cric)

۱۱۷ - تعریف - اسبابی است که برای بلند کردن بار های سنگینی بارتفاع کم بکار میرود و آن عبارتست از یك محور قائم دندانه دار که بوسیله چرخ دندانه داری که حول محور افقی میگردد بالا وپائین میرود .

۱۱۸ - شرط تعادل جك : $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$ (P و Q

قدرت و مقاومت و R و r طول دسته گرداننده و شعاع چرخ دندانه دار است)

قرقره

۱۱۹ — **تعریف** — استوانه ایست فلزی یا چوبی که حول محور خود میتواند دوران کند بطرفین محور دوشاخه ای متصل است که اگر آنرا بوسیله قلابی بنقطه ثابتی بیاویزند قرقره را ثابت والا متحرک نامند.

۱۲۰ — **شرط تعادل قرقره ثابت** — شرط لازم و کافی برای تعادل آنست که مجموع عزم قوای P و R نسبت بمحور قرقره صفر باشد (از اصطکاک صرفنظر میشود).

۱۲۱ — **قرقره متحرک** — در این نوع قرقره باری را که باید بلند نمایند بقلاب دوشاخه قرقره آویزان نموده و یک سر طنابی را که از روی قرقره و داخل دوشاخه میگذرد بنقطه ثابتی وصل نموده و قدرت را بسر دیگر طناب وارد میآورند.

۱۲۲ — شرط تعادل در قرقره متحرک آنست که عزم قوای وارده نسبت به نقطه o (مرکز دائره قرقره) صفر باشد.

۱۲۳ — از اجتماع چند قرقره **موفل** (Moufle) تشکیل میشود. و اجتماع دو موفل همنوع را **پالان** (Palan) مینامند. اگر P قدرت و R مقاومت و n عده قرقره ها فرض شود شرط تعادل پالان اینست که:

$$P = \frac{R}{2n}$$

آحاد مهم علمی که در ریاضیات متداول است

واحدها	دستگاه C.G.S	دستگاه M.K.S	توضیحات
آحاد اصلی			در دستگاه M.K.S یا دستگاه متری آحاد اصلی
طول	سانتیمتر	متر	عبارتند از: متر (طول)، ثانیه (زمان) و
جرم	گرم	تن	کیلوگرم (قوه)
زمان	ثانیه	ثانیه	رادیان = قوسی از دایره مساوی طول شعاع آن
آحاد مشتق			دین = قوه‌ای که بجرم یک گرم شتاب یک سانتیمتر در ثانیه بدهد.
سطح	سانتیمتر مربع	متر مربع	استن = $(10)^{8}$ دین
حجم	» مکعب	» مکعب	ارگ = کار یک دین در یک سانتیمتر
زاویه	رادیان	رادیان	ژول = $(10)^{7}$ ارگ
			وات = ژول در ثانیه
قوه	Dyne	Sthène	پیز = 10^{3} باری
کار و نیرو	Erg	کیلوژول	باری = دین بر سانتیمتر
قدرت	ارگ در ثانیه	وات	کالری کوچک = مقدار حرارتی که یک گرم آب را یک درجه گرمتر کند.
فشار	Barr	Pièze	کالری بزرگ = ۱۰۰۰ کالری کوچک
مقدار حرارت	کالری کوچک	Thermie	ترمی = ۱۰۰۰ کالری بزرگ

هیئت

۱ — کلیات

۱ — **کره سماوی** یا **فلک** کره موهومی است که مرکزش یک نقطه اختیاری از زمین وشعاعش نامحدود است و کواکب درسطح داخل آن قرار گرفته اند .

۲ — **خط قائم** هر نقطه عبارت از امتداد قوة ثقل در آن نقطه است که موازی امتداد شاغول میباشد (محور بدن هر شخص در روی زمین امتداد قائم را نشان میدهد) .

۳ — **سمت الرأس** و **سمت القدم** نقاط تلاقی خط قائم هر نقطه اند با کرة سماوی ، آنکه در بالاست سمت راس و دیگری سمت قدم میباشد .

٤ — **سطح قائم** هر نقطه هر سطحی است که برخط قائم بگذرد .

٥ — **محور عالم** خط موهومی است که کرة سماوی بدور آن میگردد .

٦ — **قطبین عالم** دو نقطه برخورد محور عالم با کرة سماوی هستند . آنکه در نیمکره شمالی است **قطب شمال** و دیگری **قطب جنوب** است (قطب شمال در حدود صورت فلکی بنام خرس کوچک (دب اصغر) و مجاورت ستاره **جدی** و قطب جنوب درحوالی صورت فلکی بنام **صلیب جنوبی** واقعند) .

۷ — نصف النهار هر نقطه سطح قائمی است که بر محور عالم میگذرد.

۸ — سطح افق هر نقطه سطحی است که از آن نقطه بر خط قائم همان نقطه عمود شود.

۹ — استوای فلکی یا معدل النهار دایره عظیمه‌ای از کره سماویست که عمود بر محور عالم است.

۱۰ — مدارات دوایر کوچکی از کرهٔ فلکی موازی معدل النهار میباشند.

۱۱ — دائرهٔ ساعتی یا نصف النهار هر کوکب دایره ایست که بر این کوکب و محور عالم میگذرد.

۱۲ — زاویهٔ ساعتی هر کوکب در هر لحظه قوسی است از معدل النهار محصور بین دایرهٔ ساعتی آن کوکب و نصف‌النهار مکان.

۱۳ — حرکت یومی — هر کوکب در ۲۴ ساعت یکبار حول محور عالم میگردند. چون کواکب ظاهرا بر سطح کرهٔ سماوی قرار دارند بنظر میرسد که کرهٔ سماوی در ۲۴ ساعت یکبار حول محور خود از مشرق بمغرب دوران میکند. این حرکت ظاهری را حرکت یومی میگویند. مسیر هر کوکب بر یکی از مدارات است.

۱٤ — دایرة البروج یا دایرهٔ خسوف و کسوف دایره عظیمه ایست که زمین در یکسال حول خورشید میپیماید و سطح آن با معدل النهار زاویه ۲۳° ۲۷' ۵" تشکیل میدهد.

۱۵ — **نقاط اعتدال** عبارتند از دو نقطه تلاقی دایرة البروج بامعدل النهار . آنرا که زمین درموقع رفتن از نیمکرهٔ جنوبی بنیمکرهٔ شمالی از آن میگذرد **نقطهٔ اعتدال بهاری** (ربیعی) میگویند و ♈ نام میگذارند ، دیگری را که زمین درموقع رفتن از نیمکرهٔ شمالی به نیمکرهٔ جنوبی از آن میگذرد **نقطهٔ اعتدال پائیزی** (خریفی) و ♎ مینامند .

۱۶ — **نقاط انقلاب** دو نقطه از دایرة البروجند که هر یك بفاصله ۹۰ درجه از نقاط اعتدال قرار دارند . آنکه در نیمکرهٔ شمالی است بنقطهٔ **انقلاب تابستانی یاصیفی** و دیگری که در نیمکرهٔ جنوبی است بنقطهٔ **انقلاب زمستانی یاشتوی** موسوم است .

۱۷ — **جهت مستقیم و جهت معکوس** — اگر شخصی برمحور عالم قرار گیرد و سر او متوجه شمال باشد هر حرکت که از طرف راست بچپ او انجام گیرد در جهت مستقیم است و در جهت دیگر ، یعنی از چپ براست ، در **جهت معکوس** .

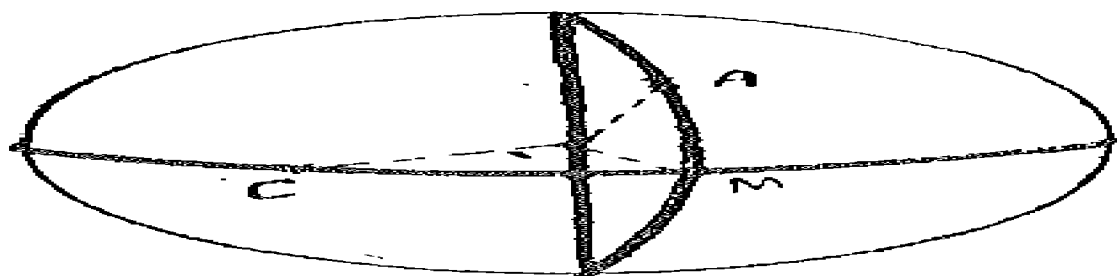
۱۸ — **قطر ظاهری** هر کوکب بشعاع R که بفاصله d از ناظر واقع باشد زاویهٔ α حادث بین اشعهٔ بصری محدود بدو انتهای قطر کوکب میباشد .

پس $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d}$

وچون قطر ظاهری بسیار کوچك است وجیب زاویه با خود آن مساویست : $\alpha = 2\frac{R}{d}$

II – مختصات کروی

۱۹ – برای مشخص ساختن وضع یك نقطه A بر روی کره سماوی از مختصات کروی استفاده میشود.

در هر دستگاه مختصات کروی دایره عظیمه‌ای بنام **صفحهٔ اصلی** در نظر گرفته میشود و در روی آن نقطه C را بنام مبداء اختیار مینمایند. آنگاه بر نقطه مفروض A و محور عمود بر صفحه اصلی دایره عظیمه دیگری میگذرانند تا دایره اصلی را در M قطع کند. دو قوس CM و AM مختصات نقطه A هستند که اولی از ۰ تا ۳۶۰° در جهت مستقیم یا معکوس و دومی از ۰ تا ۹۰° در جهت مثبت یا منفی اندازه گرفته میشوند (ش ۱)

۲۰ – **دستگاه مختصات افقی (مختصات سمتیه):** **سمت و ارتفاع** — صفحه اصلی صفحه افق و نقطه اصلی محل تلاقی افق با سطح قائم ثابتی بنام سطح قائم اصلی میباشد. مختص اول را سمت و مختص دوم را **ارتفاع** میگویند. سمت در جهت معکوس اندازه گرفته میشود.

گاهی بجای ارتفاع متمم آن که **فاصله سمتی** یا **فاصلة الراسی** نام دارد داده میشود. مختصات افقی بستگی بزمان و مکان ترصد دارند. حد اعلای ارتفاع را **اوج** مینامند.

۲۱ — ارتفاع قطب: ارتفاع قطب از افق هر محل از
روی دستور $\Phi = 90 - \frac{1}{2}(z + z')$ بدست میآید (z و z'
فواصل سمتی کوکب ابدی الظهوری در مواقع عبور علیا و
سفلی از نصف النهار محل و Φ ارتفاع قطب است) .

۲۲ — **دستگاه مختصات استوائی** (**مختصات
معدلی**) : **بعد و میل** — سطح اصلی استوای فلکی و نقطه
اصلی **نقطه اعتدال بهاری** و جهت مستقیم (منافی حرکت
عقربه‌های ساعت) . مختص اول را **بعد** و دوم را **میل** میگویند
متمم میل **فاصله قطبی** نام دارد . مختصات معدلی بستگی با
مکان رصد ندارند .

۲۳ — **اندازه بعد** — فاصلهٔ زمانی بین عبور کوکب
از نصف النهار محل و نصف النهار مار بر نقطه اصلی را بوسیله
ساعت نجومی بدست آورده و بقرار هر ۱۵ درجه در یکساعت
بعد کوکب را حساب مینمایند .

۲۴ — **اندازه میل** — اندازه جبری میل هر کوکب
از روی دستور کلی : $\delta = \Phi \pm z$ (با در نظر گرفتن جهت)
بدست میآید (δ میل و Φ ارتفاع قطب و z فاصلة الراس کوکب
در موقع عبورش بنصف النهار میباشد)

۲۵ — **تعیین فاصله قطبی** کواکب در مکانی بعرض Φ
(شماره ۳۲):

در نیمکرهٔ شمالی

۱ — برای کواکب ابدی الظهور (حول قطبی)

۲ ــ کواکب رؤیت شونده (دارای طلوع و غروب): ٪ ... ۱۸۰ ... p ... ٪

۳ ــ « « ابدی الخفاء p ... ٪ ... ۱۸۰

در نیمکره جنوبی

۱ ــ برای کواکب ابدی الظهور (حول قطبی): p ... ٪

۲ ــ « « رؤیت شونده (دارای طلوع و غروب): ٪ ... ۱۸۰ ... p ... ٪

۳ ــ « ابدی الخفاء: p ... ٪ ... ۱۸۰

(p: فاصله قطبی کواکب در نیمکره شمالی از قطب شمال و در نیمکره جنوبی از قطب جنوب است و φ در نیمکره جنوبی منفی است)

۲۶ ــ دستگاه مختصات منطقی: طول و عرض ــ صفحه اصلی: دایرة البروج و نقطه اصلی نقطه اعتدال ربیعی ، جهت مستقیم . مختص اول: طول ، مختص دوم: عرض .

III ــ زمین

۲۷ ــ شکل زمین ــ زمین بشکل کره ایست که در قطبینش کمی فرو رفته باشد، نظیر حجمی که از دوران یک نیمه بیضی حول محور اقصرش تولید شود. سطح آن تا صاف و اطرافش را هوائی بقطر تقریباً صد کیلومتر احاطه نموده است.

۲۸ ــ دوران زمین ــ زمین با حرکت متشابه حول محور موهومی که از مرکز ثقلش میگذرد دوران میکند این محور بر محور عالم منطبق است.

۲۹ ــ خط و سطح قائم ، سطح نصف النهار و افق (بشماره های ۲ و ۴ و ۷ و ۸ مراجعه شود).

۳۰ — **خط نصف النهار** ـ فصل مشترك سطح نصف النهار هر محل با سطح افق همان مکان را خط نصف النهار آن محل گویند. این خط تصویر محور عالم بر سطح افق محل است.

۳۱ — **طول یك نقطه از سطح زمین** ـ زاویه بین نصف النهار محل و نصف النهار نقطه‌ای که مبداء فرض شده میباشد (نصف النهار گرینویچ یا پاریس را اغلب مبداء طولها میگیرند). اندازه آن از صفر تا ۱۸۰ درجه شرقی یا غربی تغییر میکند (بر حسب فاصله زمانی بازاء هر ساعت ۱۵ درجه محاسبه میشود).

۳۲ — **عرض یك نقطه از سطح زمین** ـ زاویه بین قائم مکان (امتداد شعاع زمین در آن نقطه) با سطح استوا است و همچنین مساویست با ارتفاع قطب از افق آن محل (شماره ۲۱).

۳۳ — **مدارات** ـ مدارات زمین مکان هندسی نقاطی از زمین میباشند که دارای یك عرض باشند.

۳۴ — **استوای زمین** ـ مداری است بعرض صفر.

۳۵ — **قطبین زمین** ـ دو نقطه از زمین بعرض ۹۰° میباشند.

۳۶ — **شعاع d افق حسی** ـ اگر R شعاع زمین و h ارتفاع شخص ناظر از سطح زمین باشد مقدار d شعاع افق حسی از روی دستور $d = \sqrt{2hR}$ بدست میآید.

۳۷ — **انحناض افق** ـ زاویه‌ای را که در آسمان نقطه‌ای از فضا

(چشم ناظر که مقداری بالاتر از سطح زمین قرار گرفته باشد) و دو ضلعش یکی مماس بر کره زمین و دیگری خط افقی باشد زاویه انخفاض افق گویند .

۳۸ — طول شعاع زمین از روی زاویهٔ انخفاض افق — اگر R شعاع زمین و h ارتفاع ناظر و α زاویه انخفاض افق باشد :

$$R = \frac{h \cos\alpha}{2\sin^{2}\frac{\alpha}{2}}$$

(بازاء : ۲۰۰ متر = h و ۳۳' = α ، ۷۰۰۰ کیلومتر = R میشود)

۳۹ — ابعاد زمین — ربع محیط نصف النهار زمین مساوی است با : ۱۰۰۰۱۸۶۸ متر .

محیط استوائی زمین مساوی است با : ۴۰۰۷۵۷۲۱ متر .

سطح کره زمین : 5100065×10^{2} کیلومتر مربع

حجم کره زمین : 1083205×10^{6} کیلومتر مکعب .

شعاع کره ای که نصف النهارش مساوی نصف النهار زمین باشد = ۶۳۶۷۳۸۷ متر است .

شعاع کره ای که سطحش مساوی سطح زمین باشد = ۶۳۷۱۰۰۳ متر است .

شعاع کره ای که حجمش مساوی حجم زمین باشد = ۶۳۷۰۹۹۶ متر است .

شعاع استوائی زمین مساوی است با : ۶۳۷۸۲۴۹ = a متر

» » قطبی » » : ۶۳۵۶۵۱۵ = b متر

فرورفتگی قطبی $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{۲۳ر۹۵}$ است

۴۰ — اندازهٔ شتاب ثقل زمین — در نقطه‌ای از زمین بعرض ۴۵° و هم سطح با دریا مساوی است با ۹۸۰ر۶۶۵ (در دستگاه س.گ.ث.)

۴۱ — وزن مخصوص زمین — در داخل زمین وزن مخصوص ۵ر۵ و نسبت باحجار واقع در سطح زمین ۵ر۲ است.

۴۲ — سرعت حرکت انتقالی زمین در هر ثانیه ۲۹ کیلومتر است.

۴۳ — مدت حرکت انتقالی زمین بدور شمس ۳۶۵ روز و ۵ دقیقه و ۹۴ر۸۴ ثانیه است.

۴۴ — مختصات جغرافیائی تهران — طول تهران از نصف النهار پاریس ″۷ و ′۵ و °۴۹ و عرض تهران ″۷ و ′۴۱ و °۳۵ میباشد.

۱۷ — نقشه‌های جغرافی

۴۵ — تعریف — نقشه‌های جغرافی عبارتند از صفحاتی که تمام یا قطعه‌ای از سطح زمین را با قاعدهٔ مخصوص و مقیاس معین بر روی آن تصویر نموده یا گسترده باشند.

برای ترسیم نقشه قبلا شبکه‌ای از نصف النهارات و مدارات زمین را تهیه نموده و بعد محل هر نقطه را از روی طول و عرضش بر روی آن معین مینمایند.

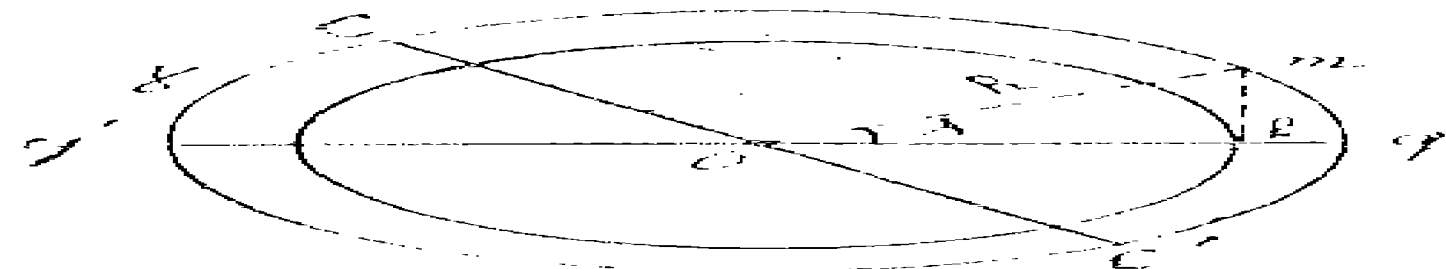
۴۶ — تصویر قائم هر نقطه بر یک صفحه موقع عمودی است که از آن نقطه بر صفحه وارد شود. این صفحه را صفحهٔ تصویر نامند.

۴۷ — رسم نقشه بطریق تصویر قایم:

۱ — سطح تصویر سطح استوا میباشد: تصویر قطب بر مرکز استوا قرار دارد، تصویر هر مدار بعرض φ دایره ایست متحد المرکز با استوا و بشعاع $R \cos \varphi$ ، تصویر هر نصف النهار بطول λ قطری از استوار است که با تصویر نصف النهار مبداء زاویه λ تشکیل دهد.

طریقه رسم — ۱) برای رسم مداری بعرض φ از نقطه m انتهای شعاع Om که با Oe زاویه φ دارد عمود mh را بر Oe وارد مینمائیم، دائره ای بمرکز O و شعاع Oh تصویر مدار مفروض است (ش ۲).

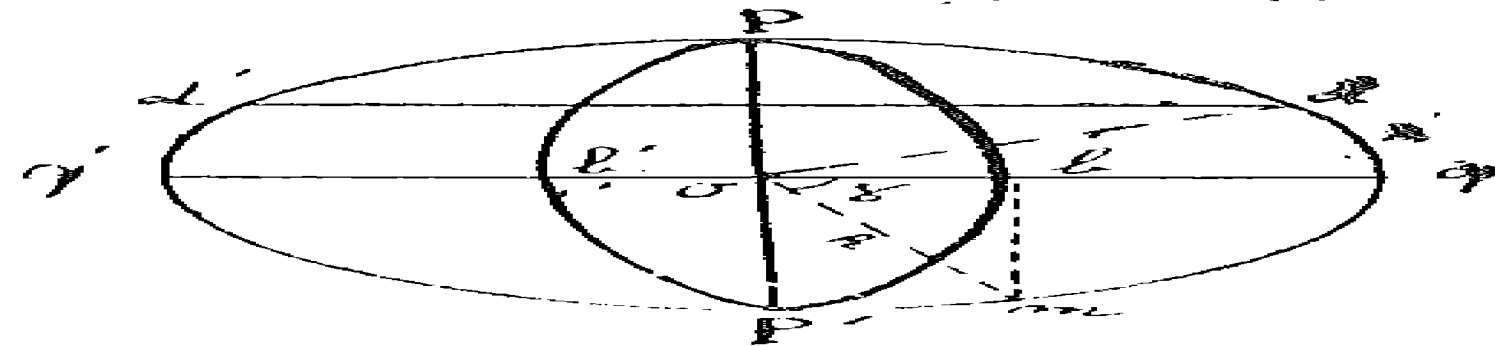
۳) قوس eL را مساوی λ جدا مینمائیم قطر LL' تصویر نصف النهار بطول λ میباشد (ش ۲).

(ش ۲)

۲) سطح تصویر یکی از سطوح نصف النهار است: تصویر مدارات و استوا خطوط فصل مشترک آنها با سطح تصویر است.

تصویر مداری بعرض φ وتری است موازی استوا که فاصله اش از آن روی محیط دایره نصف النهار تصویر φ درجه است؛ تصویر هر نصف النهار بطول λ بیضی است که محور

اطولش خط قطبین و محور اقصرش بطول $2R\cos\lambda = bb'$ میباشد .

طریقه رسم ۱) برای رسم مداری بعرض λ قوس qq_1 را مساوی λ جدا مینمائیم وتر $q_1q'_1$ که موازی qq' است تصویر مدار مفروض میباشد .

۲) از نقطه m انتهای شعاع Om که با Oq زاویه λ میسازد عمود mb را بر qq' وارد میکنیم و بر سه نقطه P و b و P' یک نیمه بیضی و بر P و P' و b'، قرینه b نسبت به O، نیمه بیضی دیگری میگذرانیم بیضی $PbP'b'$ تصویر نصف النهار بطول λ میباشد (ش ۳) .

خواص و مورد استعمال — در تصویر قائم نواحی حول مرکز نقشه نزدیک بحقیقت تصویر میشوند و هر چه از مرکز نقشه دور تر شویم دقت نقشه کمتر میشود . طریقه تصویر قائم را بیشتر برای تهیه نقشه نواحی قطب زمین و صور فلکی آسمان و همچنین تصویر ماه و آفتاب و کرات دور بکار میبرند .

٤٨ — تصویر مرکزی (استرئوگرافیک)

۱ — تعریف - بشماره ۳۰۵ و ۳۰٦ قسمت هندسه مراجعه شود.

۲ — در تصویر مرکزی زوایا بمقدار حقیقی تصویر میشوند.

۳ - تصویر مرکزی هر دایره دایره است.

رسم نقشه بطریق تصویر مرکزی

۱ — پرده سطح استوا است و مرکز تصویر یا نقطه دید یکی از قطبین میباشد، تصویر مداری بعرض λ دایره‌ایست بمرکز استوا و شعاع $r = R\,tg\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)$

تصویر هر نصف‌النهار بطول γ قطری از استوا است که با تصویر نصف‌النهار مبداء زاویه γ تشکیل میدهد.

طریقه رسم — ۱) قوس mn را برابر λ جدا نموده از نقطه دید V به m وصل میکنیم تا pq را در نقطه m' قطع کند دایره بمرکز O و شعاع Om' تصویر مدار بعرض λ میباشد.

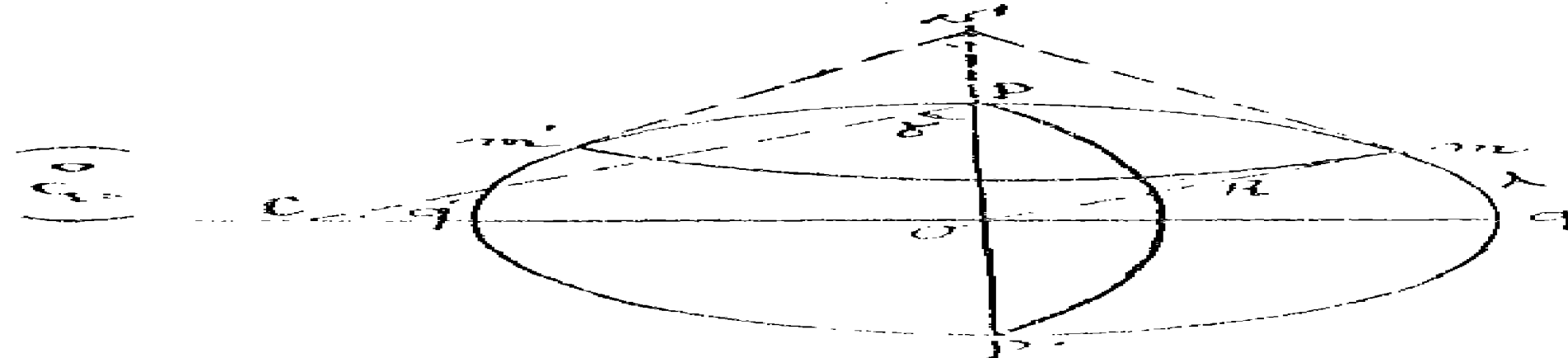
۲) قوس CC' را مساوی γ جدا مینمائیم قطر CC' تصویر نصف‌النهار بطول γ میباشد (ش ٤٤).

۳ـ پرده مماس بیکی از سطوح نصف‌النهار است و نقطه دید انتهای قطری از استوا که عمود بر پرده است میباشد. تصویر هر نیمه مدار بعرض λ قوس دایره‌ایست که مرکزش بر خط قطبین و بفاصله $\frac{R}{\sin\lambda}$ از مرکز نصف‌النهار

تصویر برقرار دارد؛ تصویر هر نصف النهار بطول ۲ قوس دائره‌ایست مار بر دو قطب که مرکزش بر قطر عمود بر خط قطبین و بفاصله [illegible] از مرکز سطح نصف النهار تصویر قرار دارد.

(ش۴)

طریقهٔ رسم ۱) قوس qm را مساوی ۲ جدا نموده مماس mS قطر PP' را در S قطع مینماید بمرکز S و شعاع Sm دائره‌ای رسم مینمائیم قوس mm' از این دائره تصویر نیمه مدار بعرض ۲ میباشد. ۲) از P خط PC را چنان رسم میکنیم که با PP' زاویه ۲ بسازد، بمرکز C نقطه تلاقی این خط با qq' وشعاع CP دائره‌ای رسم میکنیم قوس PP' از این دائره تصویر نیمه نصف النهار بطول ۲ میباشد (ش۵).

(ش۵)

خواص و مورد استعمال — در تصویر مرکزی چون
زوایا تغییر نمیکنند تصویر مشابه شکل اصلی هستند وضمناً هر
چه از مرکز بمحیط نقشه نزدیکتر شویم تصویر بحقیقت نزدیکتر
میشود . حالیه تصویر مرکزی را برای تهیه نقشه‌های مسطحه
نیمکره زمین و نقشه های ممالک بکار میبرند .

۴۹ — تهیه نقشه بطریق گسترش استوائی — استوانه
مستدیر قائمی بر یک کرهٔ مصنوعی زمین که بمقیاس معین تهیه
شده محیط مینمائیم بطوریکه دو قاعده اش بر قطبین کره
مماس شوند بعد فصل مشترکهای سطوح نصف النهارات و
مدارات را با سطح جانبی استوانه بدست میآوریم واستوانه
را روی یک صفحه میگسترانیم ، شبکه‌ای بدست میآید که در
آن نصف النهارات و مدارات بترتیب بخطوط قائم و افقی نموده
شده اند . در این گسترش ناحیه استوائی نزدیک بحقیقت نموده
شده و هرچه بقطب نزدیکتر شویم فواصل مدارات و دقت نقشه
کمتر میشود .

۵۰ - تهیه نقشه بوسیله گسترش مخروطی - مخروط
قائمی محاذی مدار متوسط ناحیه کوچکی که میخواهند نقشه
آنجا را تهیه کنند بر کره محیط مینمایند بطوریکه فصل
مشترک هر نصف النهار با سطح جانبی مخروط بر یکی از
مولدهای آن منطبق گردد . فصل مشترک سطوح مدارات را
نیز با سطح جانبی مخروط بدست آورده و مخروط را بر صفحه‌ای
میگسترانند شبکه نقشه‌ای بدست میآید که در آن نصف النهارات

بخطوط متقاطع در یک نقطه (راس مخروط) و مدارات به دوایر متحدالمرکزی بمرکز راس مخروط نموده شده‌اند .

این نقشه برای ناحیه کوچکی از کره که در طرفین مدار متوسط آن واقع شده است قابل استفاده میباشد .

۷ — خورشید

۵۱ — مدار خورشید — خورشید در جهت مستقیم بدور زمین (بفرض ثابت بودن) مداری بیضی شکل میپیماید که زمین در یکی از کانونهای آن قرار گرفته و خروج از مرکز این بیضی تقریباً $\frac{1}{6}$ ، ، میباشد .

۵۲ — میل دایرة البروج — زاویه بین دایرة البروج و استوای فلکی مساوی ′۲۷ و °۲۳ میباشد .

۵۳ — قطر ظاهری خورشید — قطر ظاهری متوسط خورشید ″۲۵ر۵۹ و ′۳۱ یا باتقریب ′۳۲ میباشد بزرگترین مقدار قطر ظاهری در دیماه (اول ژانویه) ″۳۵ و ′۳۲ و کوچکترین مقدار آن در تیرماه (اول ژوئیه) ″۳۲ ، ′۳۱ است .

۵۴ — اختلاف منظر افقی شمس ″۸ر۸۰ میباشد

۵۵ — شعاع خورشید — صد برابر شعاع زمین و مساوی ۶۹۵۵۰۰ کیلومتر است

۵۶ — وزن مخصوص آن نسبت بآب ۴ر۱ و نسبت بزمین ۲۵۶ر۰ است

۵۷ — جرم خورشید ۳۳۳۴۳۲ برابر جرم زمین است .

۵۸ — حجم خورشید ۱۳۰۱۲۰۰ برابر حجم زمین است .

۵۹ – سنگینی هر جسم در روی استوای خورشید تقریباً ۲۸ برابر سنگینی آن جسم در روی استوای زمین است .

۶۰ – خورشید در مدت ۳۳ روز و ٤ ساعت و ۲۹ دقیقه یکمرتبه بدور خود میگردد .

۶۱ – فاصله متوسط زمین از خورشید ۲۳٤٤۰ برابر شعاع زمین یا ۱٤۹۵۰۱۰۰۰ کیلو متر یا بعدد کامل ۱۵۰۰۰۰۰۰۰ کیلومتر است .

۶۲ – **تقدیم دو نقطهٔ اعتدال** – نقطهٔ اعتدال بهاری هر سال تقریباً ۲۶ر۵۰″ در جهت مخالف (بر خلاف توالی بروج) عقب میرود . یعنی در ۲۶۰۰۰ سال یکدور معدل النهار را طی میکند .

۶۳ – **تعیین دو نقطهٔ اعتدال** – اگر a و d بعد و میل خورشید در ظهر روز قبل از نوروز (نوروز روز یستکه خورشید بنقطهٔ اعتدال بهاری γ میگذرد) و a_1 و d_1 بعد و میل آن در ظهر روز بعد از نوروز باشند و x بعد نقطهٔ γ باشد :

$$x = \frac{a d_1 + d a_1}{d + d_1}$$

بعد نقطهٔ اعتدال پائیزی (خریفی) γ′ نیز بکمک همین دستور حساب میشود .

پس از محاسبه معلوم میشود که اختلاف این دو بعد ۱۸۰ درجه است (مبداء بعد اختیاری است)

۶٤ – **تعیین ساعت عبور شمس بنقطهٔ اعتدال بهاری** – اگر t زمان بین ظهر روز قبل از نوروز و ظهر روز بعد از

نوروز و (°۱) میل شمس در این دو موقع و (۱) زمان بین
ظهر روز قبل از نوروز تا موقع عبور شمس از نقطه γ باشد .

[illegible]

۶۵ – ساختمان آفتاب – اگر از مرکز بسمت محیط رویم
از طبقات زیر بترتیب عبور خواهیم کرد :

۱ — هسته مرکزی سیال با درجه حرارت بی اندازه زیاد ؛

۲ — یک سطح درخشان موسوم به فوتوسفر یا کره نور که از گازهای محترقه تشکیل شده و نوری که بنظر ما میرسد از این طبقه است و کلف های خورشید نیز لکه های سیاهی هستند که در این طبقه جا دارند ؛

۳ – یک اتمسفر بخار موسوم به طبقه تابان که طیف شمسی از آن حاصل میشود ؛

٤ – یک اتمسفر قرمز رنگ موسوم به کرومسفر یا کره رنگین که مخصوصاً از هیدروژن تشکیل یافته ؛

۵ – یک طبقه شفاف و سفید رنگ که در موقع کسوف به شکل طوق سفید دیده میشود .

VI – زمان و تقویم

۶۶ – زمان نجومی (T) بین طلوع و غروب کوکبی که فاصله قطبیش (P) باشد در مکانی بعرض (λ) عبارتست از :

[illegible]

۶۷ — روز نجومی عبارتست از فاصله دو عبور متوالی مرکز ستاره‌ای از نصف‌النهار معین و طول آن ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه است.

۶۸ — روز خورشیدی یا شمسی عبارتست از فاصله دو عبور متوالی خورشید از نصف‌النهار معین. طول روز شمسی ثابت نیست زیرا سرعت حرکت آفتاب بر روی دایرة البروج ثابت نمیباشد.

۶۹ — خورشید مجازی خورشیدی است که دایرة البروج را در مصاحبت خورشید حقیقی با سرعت ثابتی بپیماید.

۷۰ — روز شمسی متوسط فاصله دو عبور متوالی خورشید مجازی است بر نصف‌النهار معین.

۷۱ — ساعت نجومی $\frac{1}{24}$ روز نجومی و ساعت شمسی $\frac{1}{24}$ روز شمسی حقیقی و ساعت رسمی $\frac{1}{24}$ روز شمسی متوسط است.

۷۲ — سال مداری یا اعتدالی = مدت بین دو عبور متوالی خورشید بر نقطه اعتدال بهاری است و عبارتست از:
۳۶۵ر۲۴۲۱۹۸۷۹ روز = ۳۶۵ روز ۵ ساعت ۴۸ دقیقه ۴۷ر۵۵ ثانیه

۷۳ — سال نجومی مدت زمانی است که بعد خورشید از مبداء نقطه اعتدال بهاری ۳۶۰ درجه افزوده شود، یا زمان بین دو عبور متوالی شمس بنصف‌النهار کوکبی است ثابت و عبارتست از:

۵ر۹ ثانیه ۹ دقیقه ۶ ساعت ۳۶۵ روز

۷۴ — **فصول** — فواصل زمان بین عبور خورشید از نقاط اعتدال و انقلاب را چهار فصل مینامند .

بهار بین نقطهٔ اعتدال بهاری تا انقلاب تابستانی : ۲۱ ساعت ۹۲ روز

تابستان » » انقلاب تابستانی تا اعتدال پائیزی : ۱۴ ساعت ۹۳ روز

پائیز » » اعتدال پائیزی تا انقلاب زمستانی : ۱۹ ساعت ۸۹ روز

زمستان » » انقلاب زمستانی تا اعتدال بهاری : ۱ ساعت ۸۹ روز

۷۵ — **معادلهٔ زمان** — معادله زمان عبارتست از $t_v - t_m$ یعنی تفاضل بین زمان متوسط و زمان حقیقی در یک مکان معین و برای خواندن ساعت آفتابی دانستن آن حتماً لازم است و تغییرات آنرا جدول زیر نشان میدهد :

تاریخ	اول ژانویه	۱۱ فوریه	۱۶ آوریل	۱۴ مه	۱۴ ژوئن
$t_v - t_m$	دقیقه ۴ −	ثانیه دقیقه ۲۶ ۱۴ −	۰	ثانیه دقیقه ۵۲ ۳ +	۰
تاریخ	۲۶ ژوئیه	۱ سپتامبر	۳ نوامبر	۲۴ دسامبر	اول ژانویه
$t_v - t_m$	ثانیه دقیقه ۱۸ ۶ −	۰	ثانیه دقیقه ۲۰ ۱۶ +	۰	دقیقه ۴ −

تقویم

۷۶ — سال مداری عبارتست از فاصله دو عبور متوالی خورشید از نقطه اعتدال ربیعی.

۷۷ — سال رسمی سالی است مرکب از عدد صحیحی از ایام که در حد اعلای امکان با سال اعتدالی تطبیق نماید.

۷۸ — تقویم قاعده‌ایست که برای تطبیق سالهای رسمی با سالهای مداری وضع میگردد.

تقویم در نزد ملل مختلف مبانی مختلف داشته و دارد که مهمترین آنها عبارتند از تقویم مصری، قیصری، گرگواری و تقویم جلالی (فارسی).

۷۹ — **تقویم مصری** — مصریان سال رسمی را ۳۶۵ روز میگرفتند، پس در هر سال در حدود شش ساعت عقب میافتادند بطوریکه در هر سیصد و شصت و پنجسال ۳ ماه در تعیین فصول اختلاف حاصل میشد و هر فصل جای خودرا بفصل دیگر میداد، پس برای اینکه اول بهار رسمی بعد از یک دوره مجدداً باول بهار واقعی منطبق گردد باید ۱۴۶۰ سال بگذرد این دوره ۱۴۶۰ ساله را دوره سوتیاک میگفتند.

تقویم قیصری — رومیان نخست سال را ۳۶۴ روز و بعد مانند مصریان ۳۶۵ روز میگرفتند ولی برای جلوگیری از بی نظمی تاریخ مصری هر چندین سال یکبار چند روز بسال رسمی خود میافزودند تا با سال مداری تطبیق کنند.

در ۴۶ سال پیش از میلاد ژول سزار قیصر روم بدستیاری

سوزیژن منجم تصمیم باصلاح تقویم گرفت و هر سه سال را ۳٦٥ روز و سال چهارم (کبیسه) را ۳٦٦ روز مقرر داشت .

تقویم گرگواری — اصلاح قیصری برای تطبیق سال رسمی با سال مداری کافی نبود و سال رسمی باندازه ۳/٤۰۰ روز از سال مداری درازتر بود . پاپ گرگوار هشتم بکمک منجم معروف لیلیو بسال ۱۵۸۲ مقرر داشت که ده روز اختلافی را که از موقع اصلاح قیصری بوجود آمده بود اصلاح کنند و روز ٤ اکتبر ۱۵۸۲ را ۱۵ اکتبر بدانند و از آن پس در هر چهار صد سال سه سال کبیسه را غیر کبیسه محسوب نمایند .

اکنون در تاریخ مسیحی سالهائی که دو رقم آخرشان به ٤ قابل قسمت است کبیسه اند مگر آنها که بدو صفر ختم میشوند و سده های آنها بر چهار قابل قسمت نیستند (مانند ۱۹۰۰) .

۸۲ — **تقویم جلالی** — تعدیل گرگواری هم اختلاف بین سالهای رسمی و مداری را کاملا از بین نمیبرد یعنی در هر دو هزار سال یکروز اختلاف پیدا میشود .

بهترین تعدیلی که تا کنون در تقویم شده است بوسیله عمر خیام و جمعی دیگر مانند عبدالرحمن خازنی در سال ٤٧١ هجری انجام شده است و اختلاف بین سالهای رسمی و مداری در هر ششهزار سال یکروز است .

در این تقویم در هر دوره سی و سه ساله هشت سال کبیسه و ۲٥ سال غیر کبیسه است باین ترتیب که از آغاز دوره هر سه

سال غیر کبیسه و ۳ سال چهارم کبیسه است و در آخر دوره چهار سال غیر کبیسه میباشد.

آغاز دوره سی و سه ساله‌ای که فعلا در آن هستیم سال ۱۳۱۰ بوده است: در این دوره سالهای ۱۳-۱۷-۲۱-۲۵-۲۹-۳۳-۳۷-۲-۴ کبیسه میباشند.

۸۳ — تقویم قمری — سال عادی قمری ۳۵۴ روز و در سالهای کبیسه ۳۵۵ روز است و مشتمل بر ۱۲ ماه ۲۹ روزی یا ۳۰ روزی است.

ماه قمری با دیدن هلال ماه مشخص میگردد ولی برای آنکه وضع ثابتی داشته باشند معمولا یکماه بیست و نه روزی و ماه دیگر ۳۰ روزی حساب میشود.

در هر دوره سی ساله یازده سال کبیسه است که عبارتند از سالهای ۲ و ۵ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ و ۱۸ و ۲۱ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۹.

VIII — ماه

۸۴ — مدار ماه — قمر بدور زمین مدار بیضی شکلی در جهت مستقیم می پیماید که زمین در یکی از کانونهایش قرار گرفته و میل متوسطش نسبت بدایرة البروج ۵°۸′۴۳″ است و این میل در مدت ۱۷۳ روز بین ۵° و (۱۸′ و ۵°) تغییر میکند. خروج از مرکز این بیضی تقریبا ۰٫۰۵۴۹ یا $\frac{1}{18}$ میباشد.

۸۵ — دوره نجومی (ماه نجومی) — زمانیست

محصور بین دو مقارنه متوالی قمر با یك ستاره ثابت و مدتش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۵ر۱۱ ثانیه است .

۸۶ — **دوره اعتدالی** (ماه اعتدالی)ـ زمانیست بین دو مقارنه قمر با نقطه اعتدال ربیعی ویا زمان بین دو مرور متوالی قمر بیك نصف النهار سماوی و مدتش ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۷ر۴ ثانیه است .

۸۷ — **دوره هلالی** (ماه قمری)ـ زمانیست محصور بین دو مقارنه قمر با شمس ویا باز گشت قمر یا شمس بر هر یك از نصف النهارات و مدت متوسط آن ۲۹ روز و ۱۲ ساعت و ۴۴ دقیقه و ۹ر۲ ثانیه است .

۸۸ — **فاصله متوسط ماه از زمین** — مساوی ۲۵ر۶۰ برابر شعاع استوائی زمین یا ۳۸۴۴۰۰ کیلومتر است این مقدار مربوط است باختلاف منظر ماه وقتی که ۷ر۲″ ۵۷′ باشد.

۸۹ — **قطر ظاهری متوسط ماه** — ۴۷ر۳″ و ۳۱′ و بزرگترین مقدار آن تقریبا ۵۰″ و ۳۳′ و کوچکترین مقدارش تقریبا ۲۲″ و ۲۸′ میباشد .

۹۰ — **اختلاف منظر افقی ماه** ۷ر۲″ و ۵۷′ است .

۹۱ — **شعاع ماه** ۰/۲۷۲۳ یا $\frac{۳}{۱۱}$ شعاع استوائی زمین یا ۱۷۳۷ کیلومتر است .

۹۲ — وزن مخصوص آن نسبت به آب ۳/۳۳ و نسبت با زمین ۰/۶۰۶ است .

۹۳ — جرم ماه = ۰ر۰۱۲۳ یا $\frac{۱}{۸۱}$ جرم زمین است .

۹۴ — حجم ماه = $\frac{۱}{۵۰}$ حجم زمین میباشد .

۹۵ — سطح ماه = قریب $\frac{۱}{۱۳}$ سطح زمین میباشد

۹۶ — وزن اجسام در استوای ماه ۰ر۱۶۶ برابر وزن اجسام در استوای زمین است .

۹۷ — حرکت وضعی ماه = قمر در مدتی مساوی دوره نجومی یا یکماه نجومی یعنی ۲۷ روز و ۷ ساعت و ۴۳ دقیقه و ۱۱ر۵ ثانیه بدور خود میگردد .

۹۸ — قسمتی از ماه که قابل رویت میباشد = $\frac{۵۹}{۱۰۰}$ سطح کل آن میباشد .

۹۹ — عقدتین = نقاط تلاقی مدار ماه با دایرة البروج بنام عقدتین موسوم است یکی عقده رأس و دیگری عقده ذنب . قمر پس از عبور از عقده رأس شمالی و پس از عبور از عقده ذنب جنوبی میگردد عقده راس روزی ۳′ و ۱۰ر۶۳″ روی دایرة البروج عقب میرود یعنی در مدت ۶۷۹۳ر۵ روز یا تقریبا ۱۸ سال و $\frac{۲}{۳}$ سال یکدور دایرة البروج را طی مینماید .

VIII — خسوف و کسوف

۱۰۰ — خسوف = (گرفتن ماه) = ۱ — فاصله △ رأس

۱۰۱ — کسوف — (گرفتن خورشید) — ۱ — فاصله Δ' راس مخروط ظل ماه حاصل از تابش آفتاب بر آن از مرکز ماه بفرض اینکه r شعاع زمین و d قطر ظاهری خورشید و P اختلاف منظر آن و d' قطر ظاهری ماه باشند عبارتست از:

$$\Delta' = \frac{r \sin \frac{d'}{2}}{\sin \frac{d}{2} - \sin P}$$

میتوان در این فورمول بجای سینوس زاویه کوچك مقدار آنرا برحسب رادیان قرار داد لذا با $\frac{d'}{2}$ = ۱۶'و۲″ توجه باینکه نسبت $\frac{\sin \frac{d'}{2}}{\sin P}$ همان نسبت شعاع ماه بشعاع زمین یعنی $\frac{3}{11}$ میباشد مقدار Δ' بصورت زیر درمیآید :

$$\Delta' = r \times \frac{3}{11} \times \frac{206265}{962} = 59r$$

۲ — بفرض اینکه λ عرض قمر در لحظه مقروض و d قطر ظاهری آفتاب و d' قطر ظاهری ماه و P اختلاف منظر آفتاب و P' اختلاف منظر ماه باشد .

برای اینکه کسوف در بعضی از نقاط زمین دیده شود یعنی درموقع مقارنه داشته باشیم

$$\lambda \;\; \ldots \;\; P'' - P' + \frac{d + d'}{2}$$

برای اینکه کسوف کلی یا حلقوی در بعضی از نقاط زمین دیده شود بایستی داشته باشیم ؛

$$\frac{d - d'}{2} + p - p' [illegible] \lambda$$

عبارت $\frac{d + d'}{2} + p - p'$ بین (۲۴′ و ۱°) و (۳۴′ و ۱°)

و عبارت $\frac{d - d'}{2} + p - p'$ بین ۵۳′ و ۶۳′ تغییر میکند .

XI - قوانین هیئت

۱۰۲ - قوانین کپلر — قانون اول - سیارات حول آفتاب درجهت مستقیم بیضی هائی نزدیک بدایره میپیمایند که خورشید در یکی از دو کانون آن قرار دارد .

قانون دوم - مساحاتی که شعاع حامل هر سیاره (خط واصل بین خورشید و سیاره) در زمانهای متساوی میپیماید معادل میباشند .

قانون سوم - مجذورات زمانهائیکه سیارات صرف پیمودن مدارانشان میکنند متناسب اند بامکعبات محور اطول مدارانشان یعنی اگر t و t′ زمانهای دوره نجومی و a و a′ بترتیب طول محور های اطول مدارات دو سیاره باشند :

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{a^3}{a'^3}$$

۱۰۳ - قانون نیوتن - (قانون جاذبه عمومی) - هر گاه دو ستاره برطبق قوانین کپلر بدور یکدیگر گردش کنند بنسبت

مستقیم جرمشان و بنسبت عکس مجذور فاصله‌شان یکدیگر را جذب میکنند یعنی اگر m و m' اجرام و d فاصله دو کوکب باشند F نیروی جذب آنها نسبت بیکدیگر عبارتست از :

$$F = K \times \frac{mm'}{d^2}$$

K ضریبی است ثابت و عبارتست از قوه جاذبه‌ایکه واحد جرم بر واحد جرم در واحد فاصله وارد آورد و مقدارش در دستگاه C.G.S. عبارتست از $\left(\frac{1}{38622}\right)^2$ (این قانون فوق کلی است و بین هر دو جسم ثابت و برقرار میباشد .)

X ـ سیارات

۴۰۱ ـ سیارات عمده در دستگاه منظومهٔ شمسی بترتیب از نزدیکترین آنها بخورشید عبارتند از :

۱ ـ عطارد ۲ ـ زهره ۳ ـ زمین ۴ ـ مریخ ۵ ـ مشتری ۶ ـ زحل ۷ ـ اورانوس ۸ ـ نپتون

بین مریخ و مشتری دسته سیارات کوچك قرار گرفته‌اند

۴۰۵ ـ قانون بد ـ اعداد ۰ ،۳ ،۶ ،۱۲ ،۲۴ ،۴۸ ،۹۶ را که از دومی ببعد هر یك دو برابر عدد ماقبل است نوشته و بعد بهر یك ۴ واحد میافزائیم تا حاصل شود ۴ ،۷ ،۱۰ ،۱۶ ،۲۸ ،۵۲ ،۱۰۰ بعد هر یك از آنها را بر ۱۰ قسمت میکنیم حاصل میشود ۴ر۰ و ۷ر۰ و ۱ و ۶ر۱ و ۸ر۲ و ۲ر۵ و ۱۰ این اعداد بترتیب نسبت فواصل سیارات را از خورشید بفاصله زمین از آن با تقریب کمی نشان میدهند .

جدول مشخصات مدارات و مدت حرکت وضعی و انتقالی و عدهٔ اقمار سیارات عمده

نام سیارات	نصف قطر دوائر مدار نسبت بزمین	میل مدار نسبت بمنطقه البروج (دقیقه)	میل مدار نسبت بمنطقه البروج (درجه)	خروج از مرکز مدار	مدت حرکت وضعی (ثانیه)	مدت حرکت وضعی (دقیقه)	مدت حرکت وضعی (ساعت)	مدت حرکت انتقالی (روز)	مدت حرکت انتقالی (سال)	عده اقمار
تیر (عطارد)	۰/۳۸۷	—	۷	۰/۲۱	—	۵	۲۴	۸۸	-	—
ناهید (زهره)	۰/۷۲۳	۲۴	۳	—	۰	۲۱	۲۳	۲۳۵	—	—
زمین	۱	—	—	۰/۰۱۷	۴	۵۶	۲۳	—	۱	۱
بهرام (مریخ)	۱/۵۲۴	۵۱	۱	۰/۰۹	۲۲	۳۷	۲۴	—	۱/۹	۲
کیوان (مشتری)	۵/۲۰۲	۱۹	۱	۰/۰۵	—	۵۰	۹	—	۱۱/۹	۹
برجیس (زحل)	۹/۵۵۵	۳۰	۲	۰/۰۶	—	۱۴	۱۰	—	۲۹/۵	۱۰ [illegible]
اورانوس	۱۹/۲۱۸	۴۶	—	۰/۰۵	؟	؟	؟	—	۸۴	۴
نپتون	۳۱/۱۰	۴۷	۱	۰/۰۰۹	؟	؟	؟	—	۱۶۵	۱

دوره حرکت انتقالی سیارات کوچک که بین مریخ و مشتری قرار دارند از ۳ تا ۸ سال است

جدول ابعاد و جرم و وزن مخصوص سیارات عمده

(در ستونهای ۲ و ۴ و ۵ و ۷ مشخصات زمین مساوی ۱ و مبنا فرض شده اند)

نام سیارات	قطر ظاهری ماکزیموم (۱) ثانیه	قطر ظاهری ماکزیموم (۱) دقیقه	قطر حقیقی (۲)	فرورفتگی قطبین (۳)	حجم (۴)	جرم (۵)	وزن مخصوص (۶) نسبت بزمین	وزن مخصوص (۶) نسبت بآب	وزن اجسام در استوا (۷)
تیر (عطارد)	۱۲/۶۶	—	۰/۳۷	—	۰/۰۵	۰/۰۵۶	۱/۱	۶/۲	۰/۴۱
ناهید (زهره)	۶/۷	۱	۰/۹۶۶	—	۰/۹۰	۰/۸۱۲	۰/۹۱	۵	۰/۸۸
زمین	—	—	۱	۱/۳۰۰	۱	۱	۱	۵/۵۲	۱
بهرام (مریخ)	۲۶	—	۰/۵۴	۱/۲۰۰	۰/۱۵۷	۰/۱۰۸	۰/۶۹	۳/۸	۰/۳۷
کیوان (مشتری)	۴۹/۸	—	۱۱/۱۴	۱/۱۵	۱۲۹۵	۳۱۸/۳۶	۰/۲۵	۱/۳۶	۲/۵۳
برجیس (زحل)	۲۰/۶	—	۹/۴	۱/۱۰	۷۴۵	۹۵/۲۲	۰/۱۳	۰/۷	۱/۰۶
اورانوس	۴	—	۴	؟	۶۳	۱۴/۵۸	۰/۲۳	۱/۳	۰/۹۲
نپتون	۲/۶	—	۴/۳	؟	۷۸	۱۷/۲۶	۰/۳۱	۱/۲	۰/۹۵

« پایان »

در تدوین این کتاب

از کتابهای ذیل استفاده شده است

نام کتاب	نام نویسنده
۱ – التفهیم	ابو ریحان محمد بیرونی
۲ – جبر	دکتر محمود مهران
۳ – مکانیک	دکتر محمود مهران – محسن هنربخش
٤ – هیئت	آقای رضا نجمی (مهندس الملك)
٥ – حساب	مرحوم غلامحسین رهنما
٦ – خلاصه حساب	E. Jacquet
۷ – جبر	F. G. M.
۸ – جبر و مثلثات	H. Commissaire
۹ – خلاصه جبر	E. Jacquet
۱۰ – مثلثات	H. Faval
۱۱ – مثلثات	Carlo Bourlet
۱۲ – مکانیک	Réunion des professeurs
۱۳ – خلاصه مکانیک	E. Jacquet
۱٤ – هندسه	F. G. M.
۱٥ – هندسه	H. Commissaire
۱٦ – هیئت	» »
۱۷ – خلاصه هیئت	E. Jacquet
۱۸ – هیئت	Réunion des professeurs
۱۹ – فورمول	E. Weille et H. Sebban
۲۰ – فورمول مکانیک	T. Caronnet

غلطنامه

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۵	۱۰	باید	پایه
۵	۱۷	an	a^n
۵	۲۰	$(al)^m$	$(ab)^m$
۱۷	۱۷	دوره	دوری
۱۸	۱۲	بین $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{d}$	همچنین بین $\frac{a}{c}$ و $\frac{c}{a}$ و گذاشته شود
۱۸	۱۳	بین $\frac{a}{a-b}$	$\frac{c}{c-d}$ گذاشته شود
۲۰	۴	$n\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdots l}$	$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \cdots l}$
۳۴	۱	۴۹ر۵ر۰۰ر۰۰۰	۴ر۹۵ر۰۰ر۰۰۰
۳۴	۲	۴۹۵	۰۹۵
۳۴	۱۱	باقیماء	باقیمانده
۳۸	۴	$\sqrt{\frac{b}{b}}$	$a\sqrt{\frac{b}{b}}$
۴۳	سطر آخر	=	مقابل خط کسری قرار گیرد

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۷۹	سطر آخر	$(1+r)\ p^{-1}$	$(1+r)^{p-1}$
۸۰	۶	از	در
۸۰	سوم از آخر	حاصل	حامل
۸۳	در شکل ۶ محل تلاقی سه محور حرف o گذاشته شود		
۸۳	۳	r^3	r^2
۸۴	۱۱	OPMP	OPMP'
۹۲	۱۱	V	V'
۹۳	۲	muu^{m-1}	$mu'u^{m-1}$
۹۳	۴	y	y'
۹۳	۱۱	y'	$y' = -$
۱۰۳	۲ از آخر	a	$\frac{x}{a}$
۱۰۴	۷ از آخر	مخارج هر دو کسر a'	$ab' - a'b$ میباشد
۱۰۷	۱۲	MM''	MM'
۱۰۹	۷ از آخر	$x - a)$	$(x - a)$
۱۰۹	۳ از آخر	$\alpha_2\ \beta$	α و β
۱۱۰	۴	$[\ a,\ f(a)\ ]$	$[\ a$ و $f(\ )\ ]$
۱۱۰	۵	$f^2\ (a)$	$f'(a)$
۱۱[illegible]	۳	$+\aleph$	$+\infty$
۱۱[illegible]	۲	$\sin m$	$\sin mx$

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۱۴۱	۳ از آخر	$-\mid-b$	$a-\mid-b=$
۱۴۴	۳	P—o	P—b
۱۴۴	۹	obc	abc
۱۴۶	۵	1_c	$1_c \cos$
۱۴۹	۲ از آخر	c —	— c
۱۵۲	۷	$\cos y =$	$\cos y = a$
۱۵۳	۵	درخط از یک نوع	خط از یک نوع
۱۵۵	۷ از آخر	$c \cos^3$	$c \cos^2$
۱۵۶	۵	۹۰ B	B — ۹۰
۱۵۸		درشکل ۲ در محل تلاقی اضلاع a و b حرف B نوشته شود	
۱۷۳	۹ از آخر	M_1	M'
۱۷۵	۵ از آخر	H C	HC
۱۷۵	۳ از آخر	AH	AH'
۱۷۷	۲	— I	— \I
۱۷۹		در شکل ۶ محلهای B و C باهم عوض شوند	
۱۷۹		در شکل ۷ بجای L حرف P نوشته شود	
۱۸۲	۲	ac+bd	ac+bd
۱۸۳	۴	قطر	اقطار
۱۸۵	۲ و ۵	۱ + √۵	۱ + √۵
۱۸۵	۹	a	a'

صفحه	سطر	غلط	صحیح
١٨٥	١٢	[illegible] ٢ و [illegible]	[illegible] ٢ و [illegible]
١٨٦	٦ از آخر	مماس	تماس
١٩٣	٢	ISV ۰۰۰	ISO
١٩٦	١۰	درهرروی	درروی
١٩٩	٤ از آخر	$\frac{M_0}{M_0}$	$\frac{M_0}{M'_0}$
٢٢١	٨	جسم	حجم
٢٢٥	٦ از آخر	اقطارمیباشد	اقطاری باشد
٢٢٨	١٣	مانند P	مانند AB
٢٢٨	١٣	خط P	خط AB
٢٣٣	٩	در	دو
٢٣٣	٢	--	است
٢٣٤	٦	بپیچید	بپیچد
٢٣٨	١۰	(ش ٣)	(ش ٤)
٢٣٨	١٣	(ش ٤)	(ش ٣)
٢٤٩	١١	MF	MF'
٢٤٩	١٢	MF'	MF
٢٥۰	در (ش ٧) محل تلاقی AB و خط عمود بر ... را I' بگذارید		
٢٥٦	٣ از آخر	BA	B'A
٢٥٨	٤	M'M'	M, M'

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۵۸	نقطهٔ تلاقی M'A' و B'B را در (ش ۷) حرف B بگذارید		
۲۶۰	۷ از آخر	خط مشترک	مشترک خط
۲۶۱	۷ از آخر	oM	oM,
۲۶۲	۱۰ از آخر	در	دو
۲۷۰	۳ از آخر	ره	راه
۲۷۴	۵ از آخر	nm'	nn'
۲۷۶	۴	— صفحه	— از نقطه صفحه
۲۹۱	۵ از آخر	$\sqrt{R^{4}\omega^{4}-\omega^{2}}$	$\sqrt{R^{2}\omega^{2}-v^{2}}$
۲۹۲	۸ از آخر	b''	f''
۳۰۳	۶	دو	در
۳۰۷	۲ از آخر	oR =	oR = ۰